Kompleksikertoimisen toisen asteen yhtälön ratkaiseminen harpilla ja viivaimella

Kaisa Matomäki
Valkeakosken aikuislukio

22. marraskuuta 2002

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoituksena on johtaa kompleksikertoimiselle toisen asteen yhtälölle ratkaisualgoritmi, kun käytettävissä oleva välineistö rajoittuu harppiin ja viivaimeen ja kompleksiluvut esitetään kompleksitason pisteinä. Algoritmia kehitettäessä ongelma jaettiin pienempiin osaongelmiin, kuten neliöjuuren ratkaisemiseen, ja näille kullekin johdettiin ratkaisu kompleksitasossa. Samalla tultiin johtaneeksi kaikki kompleksilukujen geometriseen käsittelyyn vaadittavat peruslaskutoimitukset. Kun tämä oli tehty, kaikki tulokset koottiin yhteen.

Tuloksena saatiin yhdeksäntoista-askelinen geometrinen algoritmi, jonka avulla pystytään ratkaisemaan kompleksitason pisteet X_1 ja X_2, jotka toteuttavat yhtälön $AX_i^2+BX_i+C=0$, kun A, B ja C on annettu kompleksitason pisteinä.

Algoritmin havainnollistamiseksi esitettiin myös esimerkkitehtävä, joka suoritettiin vaihe vaiheelta. Tehtävän ratkaisua esittävästä kuvasarjasta ei puutu yhtäkään ratkaisussa tarvittavaa viivaa tai ympyrän kaarta, mikä osoittaa, että tehtävän suorittaminen on myös käytännössä täysin mahdollista.

Sisältö

1 Johdanto

Klassisen geometrian juuret periytyvät kaukaa historiasta. Jo Eukleides pohti toisen asteen yhtälön ratkaisemista geometrisesti. Teoksessaan Elementa hän esittää tavan ratkaista geometrisesti muotoa $x^2 + px = q$ olevan toisen asteen yhtälön, missä p ja q sekä juuret ovat positiivisia. Eukleideen ratkaisu perustuu janan kahtia jakamiseen oikeassa suhteessa. [1]

Tämän työn tarkoitus on jatkaa Eukleiden työtä ratkaisemalla kompleksilukukertoiminen toisen asteen yhtälö klassisen geometrian välineillä, harpilla ja viivaimella. Kehitettävän metodin avulla voidaan ratkaista mikä tahansa muotoa $ax^2 + bx + c$ oleva yhtälö, missä a, b ja c ovat annettuja kompleksitason pisteitä.

Nykyaikana toisen asteen yhtälön ratkaisemisen pitäisi onnistua algebrallisesti satunnaisesti valitulta lukiolaiselta, mutta entäpä jos välineistöksi annetaan ainoastaan harppi ja viivain. Tehtävä monimutkaistuu merkittävästi, mutta sen ratkaisu osoittaa geometrian valtavat mahdollisuudet algebrallisilta vaikuttavien ongelmien ratkaisussa.

Yhtälön ratkaistaan jakamalla tehtävä pienempiin, helpommin ratkeaviin osaongelmiin, joille kullekin johdetaan geometrinen ratkaisu. Kun nämä palaset liitetään yhteen, ratkaisu on valmis.

Toisin kuin Eukleides aikanaan, ongelman ratkaisussa hyödynnetään koordinaatistoa, tarkemmin sanottuna kompleksitasoa, joka on luonnollinen geometrinen esitystapa kompleksiluvuille.

2 Esitiedot

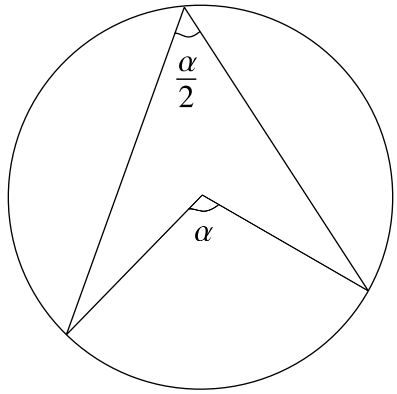
2.1 Kehäkulmalause

Kehäkulmalauseen mukaan kaikki samaa keskuskulmaa vastaavat kehäkulmat ovat yhtäsuuret ja puolet vastaavasta keskuskulmasta (Kuva 1). Todistus on suoraviivainen, mutta pitkä [2].

2.2 Pisteen potenssi

Ympyrän sisällä olevan pisteen potenssi osoittautuu monissa harpilla ja viivaimella tehtävissä laskutoimituksissa helpottavaksi apuneuvoksi, vaikka sen hyödyntäminen ei olekaan välttämätöntä.

Lause (Pisteen potenssi):



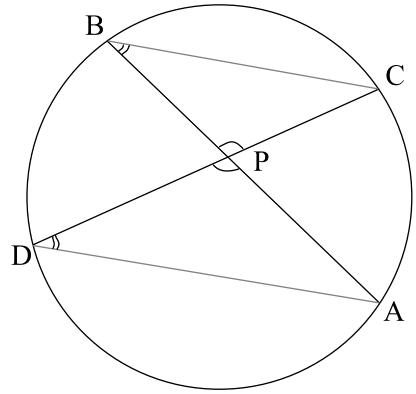
Kuva 1: Kehäkulmalause

Jos kaksi ympyrän jännettä AB ja CD leikkaavat pisteessä P, niin $|AP||PB| = |CP||PD|$.

Todistus:

$\angle(DPA)$ ja $\angle(CPB)$ ovat ristikulmina yhtä suuret. $\angle(ABC)$ ja $\angle(ADC)$ ovat kaarta AC vastaavina kehäkulmina yhtä suuret (Luku 2.1).

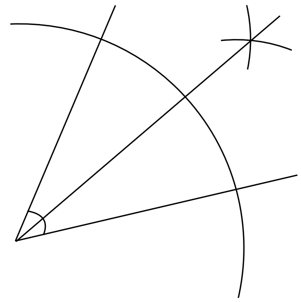
Siten $\triangle(DPA) \sim \triangle(BPC)$ (kk) $\Rightarrow \frac{|PD|}{|AP|} = \frac{|PB|}{|CP|} \Leftrightarrow |CP||PD| = |AP||PB|$. (Kuva 2)



Kuva 2: Pisteen potenssi

2.3 Kulman puolittaminen

Annettu kulma voidaan puolittaa piirtämällä aluksi kulman kärjestä ympyränkaari, joka leikkaa kulman sivut. Kun näistä leikkauspisteistä piirretään keskenään samansäteiset ympyränkaaret ja piirretään kulman kärjestä puolisuora niiden leikkauspisteen kautta saadaan kulmanpuolittaja, koska syntyvät kolmiot ovat yhdenmuotoiset. (Kuva 3)

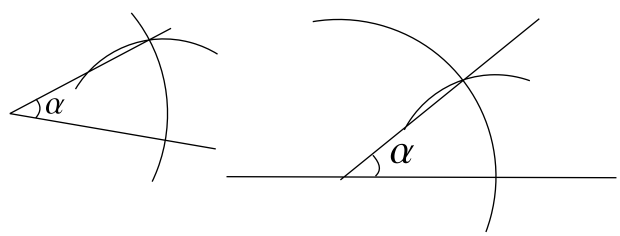


Kuva 3: Kulmanpuolittaja

2.4 Kulman siirtäminen

Kulma voidaan siirtää tietylle suoralle piirtämällä aluksi kaksi r-säteistä ympyränkaarta keskipisteinä kulman kärki ja suoran piste. Tämän jälken erotetaan kulman kylkien ja kaaren leikkauspisteen mittainen kaari harpilla myös toiselle ympyränkaarelle. (Kuva 4)

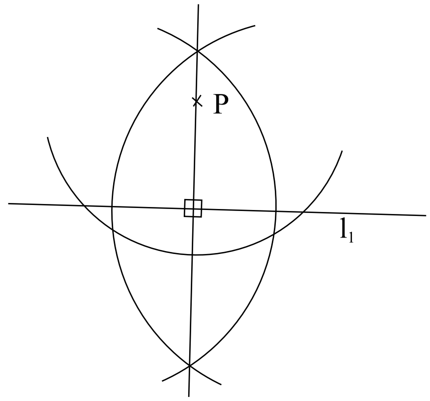
Oikokulmaa suurempi kulma saadaan siirrettyä siirämällä se vähennettynä täyskulmasta toiselle puolelle suoraa.



Kuva 4: Kulman siirtäminen

2.5 Normaalin piirtäminen annetun pisteen kautta

Suoralle l_1 saadaan piirrettyä normaali pisteen P kautta seuraavasti. Piirretään aluksi P-keskeinen ympyrä, jonka säde on suurempi kuin l_1:n ja P:n välinen etäisyys. Kun tämän ympyrän ja l_1:n leikkauspisteet keskipisteinä piirretään kaksi samansäteistä ympyrää ja piirretään suora niiden leikkauspisteiden kautta, saadaan suoran l_1 normaali, joka kulkee P:n kautta. (Kuva 5)



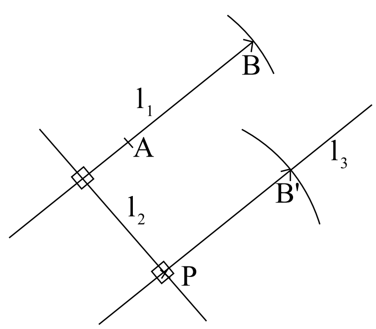
Kuva 5: Normaalin piirtäminen annetun pisteen kautta

2.6 Vektorin siirtäminen

Vektori (suunnattu jana) AB saadaan siirrettyä alkamaan pisteestä P seuraavasti. Vektorilla on kaksi perusominaisuutta, suunta ja pituus. Vektorin siirtäminen onnistuu yksinkertaisimmin piirtämällä aluksi annetun uuden vektorin lähtöpisteen kautta vektorin kanssa yhdensuuntainen suora ja siirtämällä tämän jälkeen pituus.

Vektorin AB suuntaisen suoran l_1 kanssa yhdensuuntainen pisteen P kautta kulkeva suora aikaansaadaan piirtämällä kahdesti normaali. Piirretään ensin suoralle l_1 normaali l_2 pisteen P kautta ja tämän jälkeen suoralle l_2 normaali l_3 niin ikään pisteen P kautta (Luku 2.5). Nyt l_3 kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen l_1:n kanssa.

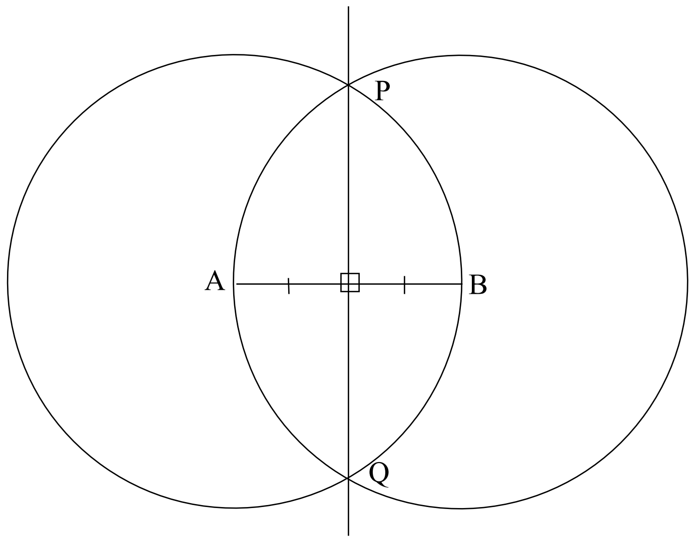
Näin saadaan siirrettyä vektori AB:n alkamaan pisteestä P vektoriksi PB', kun vielä siirretään harpilla vektorin pituus ja huolehditaan pituutta siirrettäessä, että suunta on oikea. (Kuva 6)



Kuva 6: Vektorin siirtäminen

2.7 Keskinormaalin piirtäminen

Janalle AB voidaan piirtää harpilla ja viivaimella keskinormaali seuraavasti. Piirretään A ja B keskeiset ympyrät, joiden säde on $|AB|$. Nämä leikkaavat pisteissä P ja Q. Piirretään pisteiden P ja Q kautta suora. Tämä suora on janan AB keskinormaali, koska pisteet P ja Q ovat yhtä kaukana pisteistä A ja B. (Kuva 7)



Kuva 7: Keskinormaalin piirtäminen

2.8 Kolmion ympäri piirretty ympyrä

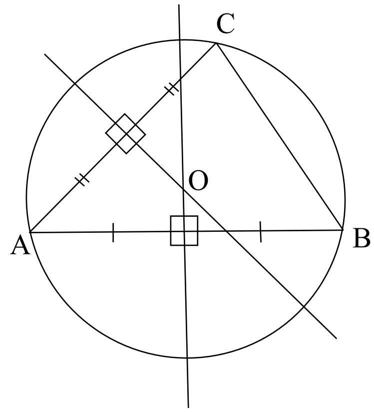
Lause:

Jokaisen kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

Todistus:

Sivun AB keskinormaali on yhtä kaukana kolmion kärjistä A ja B. Sivun AC keskinormaali on yhtä kaukana kolmion kärjistä A ja C

Siten AB:n ja AC:n keskinormaalien leikkauspiste on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjistä A, B ja C. Samoin keskinormaalien AB ja AC leikkauspiste on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjistä A, B ja C. Siten nämä kaksi leikkauspistettä yhtyvät ja keskinormaalien leikkauspiste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. (Kuva 8)



Kuva 8: Kolmion ympäri piirretty ympyrä

2.9 Kompleksiluvut

Kompleksilukuja tarkastelleen tässä niiden geometrisen tulkinnan avulla kompleksitason pisteinä. Geometristen peruslaskutoimitusten toteuttamistavat johdetaan kuitenkin kompleksilukujen algebrallisesta määritelmästä.

Kompleksiluku on järjestetty reaalilukupari $z = (a, b)$, jolle on määritelty yhteen ja kertolasku seuraavasti:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Vähennys- ja jakolasku ovat yhteen- ja kertolaskun käänteistoimenpiteitä aivan kuin reaalilukujenkin joukossa.

Vielä on syytä todeta, että kompleksiluvun n:nnellä juurella tarkoitetaan tässä kaikkia niitä kompleksilukuja x_i, jotka toteuttavat yhtälön $x_i^n = z$. Ratkaisuja n:nnellä juurella on siis n kappaletta ja ne asettuvat säännöllisen n-kulmion kulmiin, kuten myöhemmin esitettävästä napakoordinaatiston kertolaskukaavasta helposti havaitaan.

Kun lukuparin jälkimmäinen luku on 0, kompleksiluvut noudattavat tavallisten reaalilukujen laskutoimituksia. Siten kompleksiluvut ovat reaalilukujen laajennus kuten reaaliluvut ovat rationaalilukujen laajennus.

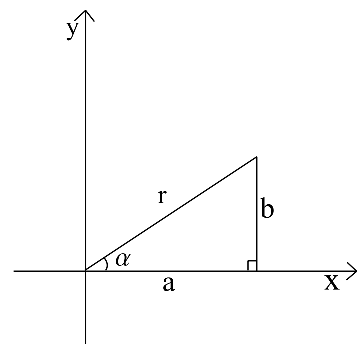
Kompleksiluvut voidaan esittää geometrisesti kompleksitasossa, jossa x-akselina on reaaliakseli ja y-akselina imaginääriakseli. Napakoordinaatistoesityksessä kompleksiluvut esitetään x- ja y -koordinaattien sijaan kompleksiluvun pituuden $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ja suuntakulman

$\alpha = \arctan \frac{b}{a}$ avulla. Muunnos napakoordinaatistosta tavalliseen saadaan kaavoilla

$$a = rcos\alpha$$

$$b = r \sin \alpha$$

koska $\cos\alpha = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r\cos\alpha$ ja $\sin\alpha = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\sin\alpha$ (Kuva 9)



Kuva 9: Napakoordinaatistoesitys

2.10 Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti

Toisen asteen yhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a, b, c \in C$

- Jos $a = 0$, $b = 0$ ja $c = 0$, kaikki määrittelyjoukon alkiot toteuttavat yhtälön.
- Jos $a = 0$, $b = 0$ ja $c \neq 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.
- Jos $a = 0$ ja $b \neq 0$, ratkaisu on yksinkertaisesti $x = -\frac{c}{b}$.

Tarkastellaan yhtälöä, jossa toisen asteen termin kerroin on nollasta poikkeava:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 || : a \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned}$$

Tehdään yksinkertaisuuden vuoksi sijoitus $\frac{b}{a} = p$ ja $\frac{c}{a} = q$. Yhtälö saadaan muotoon

$$x^2 + px + q = 0|| + (\frac{p}{2})^2$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 &= (\frac{p}{2})^2 - q \\
\Leftrightarrow (x + \frac{p}{2})^2 &= (\frac{p}{2})^2 - q \\
\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} &= \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \\
\Leftrightarrow x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}
\end{aligned}$$

Koska x:n lausekkeessa oleva neliöjuuri on kompleksilukujen joukossa määritelty kaksiarvoinen juurilauseke (Luku 2.9), niin lauseke antaa toisen asteen yhtälön molemmat ratkaisut.

Mikäli x:n arvot halutaan ratkaista geometrisesti vaihe vaiheelta hyödyntäen algebrallista ratkaisua, niin peruslaskutoimitusten hallinta kompleksitasossa harpilla ja viivaimella on välttämätöntä. Tarvittavia laskutoimituksia ovat yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku sekä neliöjuuri. Metodit näiden laskutoimitusten suorittamiseksi johdetaan seuraavaksi, minkä jälkeen on vuorossa yksityiskohtainen niitä hyödyntävä ratkaisualgoritmi.

3 Peruslaskutoimitukset kompleksitasossa

3.1 Yhteen- ja vähennyslasku

Koska kompleksilukujen yhteenlasku on määritelty $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, se vastaa vektoreiden yhteenlaskua harpilla ja viivaimella (Luku 2.6). Käytännössä yhteenlaskussa on siirrettävä jälkimmäisen tason pisteen paikkavektori alkamaan ensimmäisestä pisteestä.

Kahden kompleksiluvun erotus on määritelty $(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d)$. Siten kahden kompleksiluvun vähennyslasku kompleksitasossa onnistuu muutoin identtisesti yhteenlaskun kanssa, mutta vähentäjän etumerkki, eli siirrettävän vektorin suunta, on muutettava päinvastaiseksi.

3.2 Kertolasku

Kahden kompleksiluvun $z_1 = (a, b)$ ja $z_2 = (c, d)$ tulo määriteltiin siten, että $z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ (Luku 2.9).

Hyödynnetään tulon laskemisessa kompleksilukujen napakoordinaatistoesitystä (Luku 2.9). Kahden kompleksiluvun $z_1 = (a_1, b_1)$ ja $z_2 = (a_2, b_2)$ tulo on $z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Kun tehdään muunnos napakoordinaatistoon saadaan:

$$z_1 z_2 = (r_1 \cos\alpha_1 r_2 \cos\alpha_2 - r_2 \sin\alpha_2 r_1 \sin\alpha_1, r_1 \cos\alpha_1 r_2 \sin\alpha_2 + r_1 \sin\alpha_1 r_2 \cos\alpha_2)$$

$$= (r_1 r_2 (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2), r_1 r_2 (\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2))$$

Sinin ja kosinin summakaavat ovat (todistus [2])

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

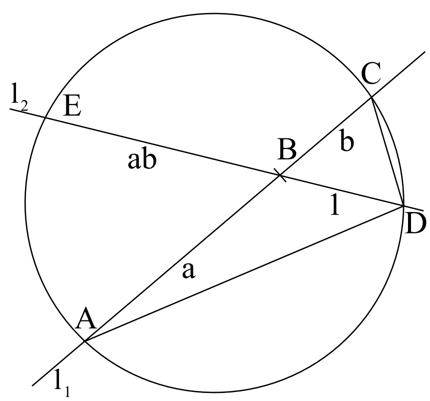
Niiden avulla saadaan

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2), r_1 r_2 sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Havaitaan, että kahden kompleksiluvun tulon pituus on kompleksilukujen pituuksien tulo ja suuntakulma on suuntakulmien summa. Oikean kulman aikaansaaminen geometrisesti onnistuu yksinkertaisesti siirtämällä toinen kulma ensimmäisen kulman viereen negatiivisen x-akselin puolelle (Luku 2.4).

Skalaarien r_1 ja r_2 kertolasku voidaan suorittaa harpilla ja viivaimella hyödyntäen pisteen potenssia (Luku 2.2). Erotetaan aluksi suoralta l_1 kuvan mukaisesti kerrottavien a ja b pituiset janat AB ja BC, joille $|AB| + |BC| = |AC|$. Piirretään seuraavaksi pisteen B kautta kulkeva suora l_2, joka ei ole yhdensuuntainen suoran l_1 kanssa. Erotetaan suoralta l_2 yksikköjana BD. Piirretään ympyrä $\triangle ADC$ ympäri (Luku 2.8). Leikatkoon tämä ympyrä suoran l_2 pisteessä E.

Pisteen potenssista saadaan $|AB||BC| = |BD||BE| \Leftrightarrow |BE| = |AB||BC| = ab$. (Kuva 10)



Kuva 10: Skalaarien kertolasku

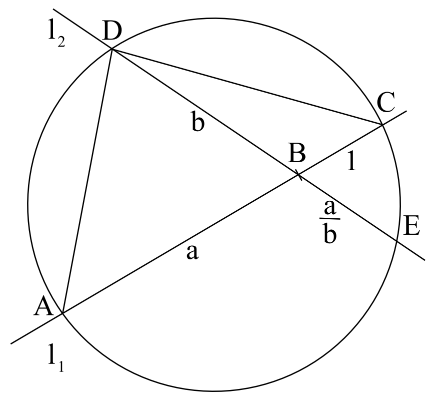
3.3 Jakolasku

Metodi jakolaskun suorittamiseen kompleksitasossa saadaan johdettua hyvin helposti, kun kertolaskun suorittamistapa tunnetaan. $\frac{z_1}{z_2} = z_3 \Leftrightarrow z_1 = z_2 z_3 \Rightarrow (r_1 = r_2 r_3) \wedge (\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3) \Leftrightarrow (r_3 = \frac{r_1}{r_2}) \wedge (\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2)$

Siten osamäärää vastaavan kompleksitason paikkavektorin pituus saadaan jakamalla jaettavan pituus jakajan pituudella ja suuntakulma vähentämällä jakajan suuntakulma jaettavan suuntakulmasta. Suuntakulmien vähentäminen onnistuu siirtämällä jakajan suuntakulma jaettavan suuntakulman viereen positiivisen x- akselin puolelle. (Luku 2.4)

Skalaarien jakolasku perustuu kertolaskun tavoin pisteen potenssiin (Luku 2.2). Olkoot jaettavan pituus a ja jakajan pituus b. Erotetaan suoralta l_1 janat AB ja BC, missä $|AB| = a$, $|BC| = 1$ ja $|AC| = a + 1$. Piirretään suora l_2, joka leikkaa l_1:n B:ssä, ja joka ei ole l_1:n kanssa yhdensuuntainen. Erotetaan l_2:lta jana BD, jolle $|BD| = b$. Piirretään sitten ympyrä $\triangle ACD$:n ympäri (Luku 2.8). Ympyrä leikkaa l_2:n pisteissä D ja E.

Pisteen potenssilla saadaan tällöin $|AB||BC| = |BD||BE| \Leftrightarrow |BE| = \frac{a}{b}$. (Kuva 11)



Kuva 11: Skalaarien jakolasku

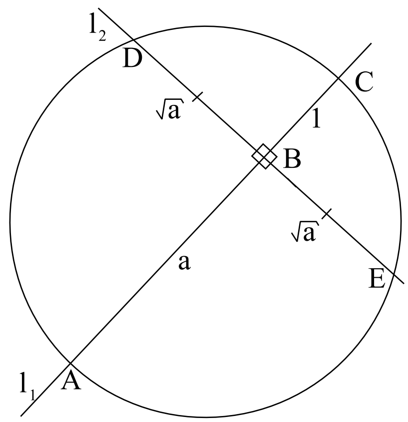
3.4 Neliöjuuri

Koska aiemmin johdetun kertolaskukaavan mukaan $(a_1, b_1)^2 = (r_1^2 \cos(2\alpha_1), r_1^2 \sin(2\alpha_1)) = (a_2, b_2) = (r_2 \cos\alpha_2, r_2 \sin\alpha_2) \Rightarrow \sqrt{(a_2, b_2)} = (a_1, b_1) = (r_1 \cos\alpha_1, r_1 \sin\alpha_1) = (\sqrt{r_2} \cos(\frac{\alpha_2}{2}), \sqrt{r_2} \sin(\frac{\alpha_2}{2}))$, neliöjuuren ottaminen voidaan geometrisesti toteuttaa puolittamalla kulma (Luku 2.3) ja ottamalla etäisyyden neliöjuuri. Juurrettessa on huomattava, että neliöjuurilausekkeella on kaksi ratkaisua, eli kulmanpuolittajan suuntaisella suoralla on ratkaisu origon molemmilla puolilla.

Skalaarin neliöjuuri saadaan hyödyntämällä pisteen potenssia (Luku 2.2). Piirretään suoralle l_1 juurrettavan a pituinen jana AB ja yksikön mittainen jana BC siten että $|AC| = 1 + |AB|$. Piirretään suoralle l_1 normaali l_2 B:n kautta (Luku 2.5). Selvitetään AC:n keskipiste piirtämällä sille keskinormaali (Luku 2.7). Piirretään AC:n keskipiste keskipisteenä $|AC|$-halkaisijainen ympyrä, joka leikkaa l_2:n pisteissä D ja E. Koska kyseessä on halkaisijan normaali, $|BD| = |BE|$ Tällöin pisteen potenssilla saadaan

$$|BD||BE| = 1|AB| \Leftrightarrow |BD|^2 = |AB| \Leftrightarrow \sqrt{|AB|} = |BD|$$

Sekä $|BD|$ että $|BE|$ ovat $|AB|$:n neliöjuuren pituisia. (Kuva 12)



Kuva 12: Skalaarin neliöjuuri

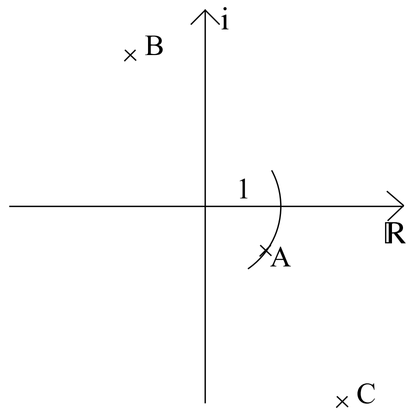
4 Yhtälön ratkaisu

4.1 Rakenne ja tehtävänanto

Kaikki tarpeelliset apuvälineet toisen asteen yhtälön ratkaisemiseksi harpilla ja viivaimella ovat nyt käytettävissä. Algebrallinen ratkaisukaava on johdettu edellä (Luku 2.10) samoin kuin metodit kaikkien sen vaatimat laskutoimitusten suorittamiseksi kompleksitasossa harpilla ja viivaimella. Niiden avulla pystytään rakentamaan kokoava algoritmi, joka on geometrikon käytettävissä. Algoritmin tehtävänä on kolmen annetun kompleksitason pisteen A, B ja C perusteella löytää sellaiset pisteet X_1 ja X_2, joille pätee $AX_i^2 + BX_i + C = 0$.

Seuraavassa johdetaan algoritmi tilanteeseen, jossa $A \neq 0$. Jos $A = B = 0$, ratkaisu on triviaali (Luku 2.10). Jos taas $A = 0$ ja $B \neq 0$, ratkaisu saadaan 2.10 mukaisesti $X = -\frac{C}{B}$. Tämä voidaan suorittaa geometrisesti käyttämällä esitettyä jakolaskumetodia (Luku 3.3).

Laskutoimitusten suorittamiseen tarvittava yksikköjana voidaan määrätä mielivaltaiseksi, koska yhtälö voidaan kertoa mielivaltaisella skalaarilla ratkaisujen muuttumatta. Yksikköjana kannattaa valita A:n pituiseksi, jolloin jaettaessa B ja C A:lla ei tarvitse suorittaa skalaarien jakolaskua, vaan kulman siirtäminen riittää. Valitaan siis $1 = |A|$, kun käytetään geometrisia algoritmeja kerto- ja jakolaskuun sekä neliöjuureen.



Kuva 13: Alkutilanne

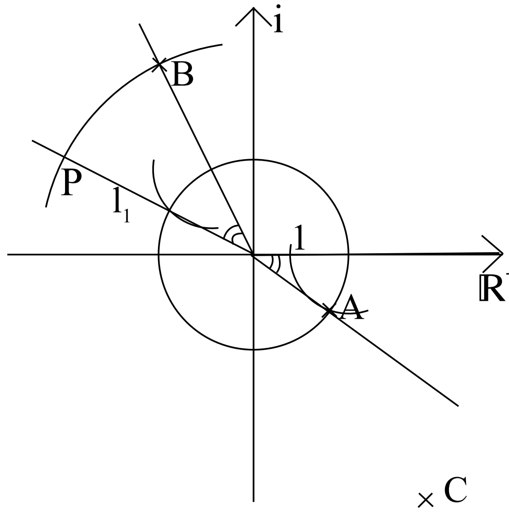
4.2 Ratkaistavan yhtälön muokkaaminen muotoon $X^2 + PX + Q$

1. Siirretään OA:n suuntakulma OB:n suuntakulman viereen positiivisen x-akselin puoleiselle kyljelle (Luku 2.4). Merkitään siirretyn kulman toisen kyljen suuntaista puolisuoraa l_1

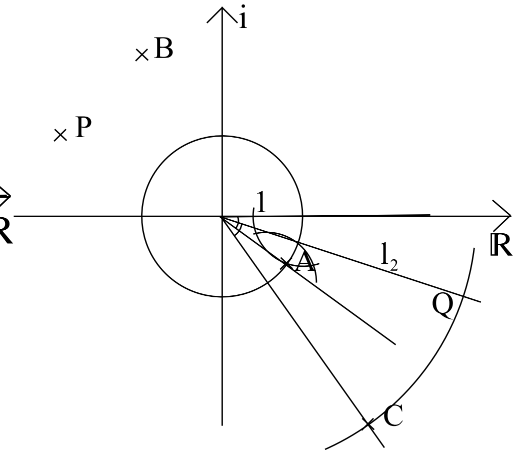
2. Erotetaan l_1:ltä jana OP, jolle pätee $|OP| = |OA|$

3. Siirretään OA:n suuntakulma OC:n suuntakulman viereen positiivisen x-akselin puoleiselle kyljelle (Luku 2.4). Merkitään siirretyn kulman toisen kyljen suuntaista puolisuoraa l_2

4. Erotetaan l_2:ltä jana OQ, jolle pätee $|OQ| = |OA|$



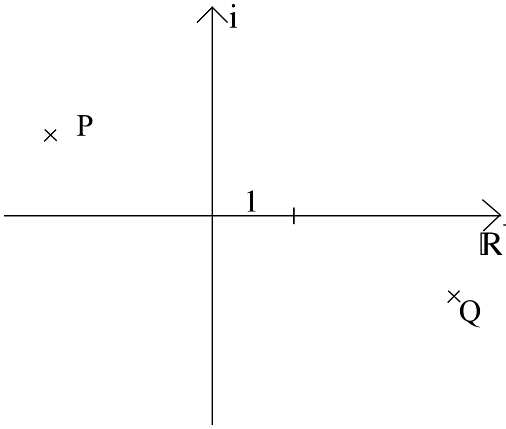
Kuva 14: Askeleet 4.2.1-2



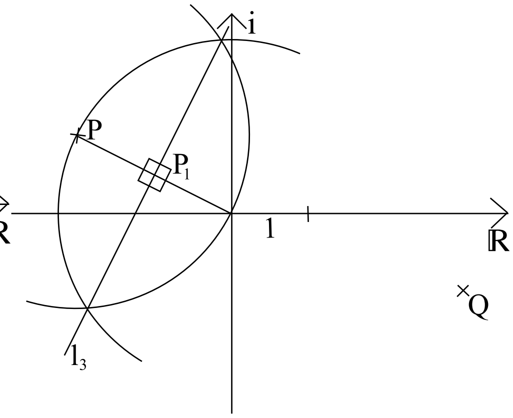
Kuva 15: Askeleet 4.2.3-4

4.3 Diskriminantti

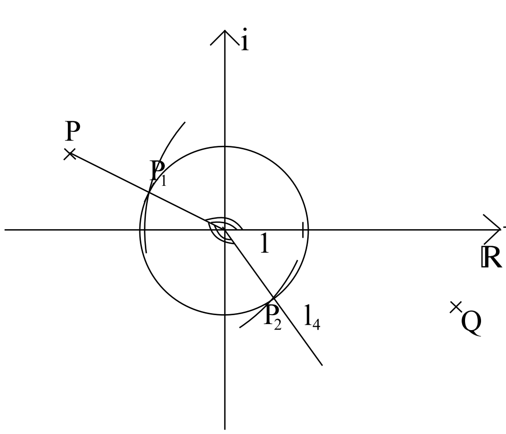
1. Piirretään janalle OP keskinormaali l_3 (Luku 2.7), joka leikkaa OP:n pisteessä P_1
2. Kaksinkertaistetaan OP_1:n suuntakulma siirtämällä se itsensä viereen negatiivisen x-akselin puolelle (Luku 2.4). Näin saadaan puolisuora l_4.
3. Erotetaan l_4:ltä jana OP_2, jolle pätee $|OP_2| = |OP_1|$
4. Piirretään P_2:n kautta suora l_5, joka ei ole l_4:n suuntainen.
5. Erotetaan suoralta l_5 yksikköjana P_2L_1
6. Erotetaan puolisuoralta l_4 jana P_2L_2, jolle pätee $|OL_2| = |OP_2| + |P_2L_2| = 2|OP_2|$
7. Piirretään $\triangle OL_1L_2$:n ympäri ympyrä ω_1 (Luku 2.8). Merkitään ω_1:n ja l_5:n leikkauspisteitä L_1 ja L_3
8. Siirretään jana P_2L_3 puolisuoralle l_4 janaksi OP_3
9. Siirretään vektori OQ alkamaan pisteestä P_3 vektoriksi P_3D (Luku 2.6), jonka suunta on vastakkainen vektorin OQ kanssa.



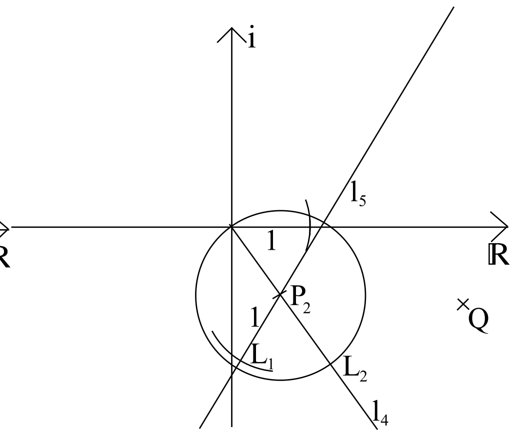
Kuva 16: Lähtötilanne 4.3



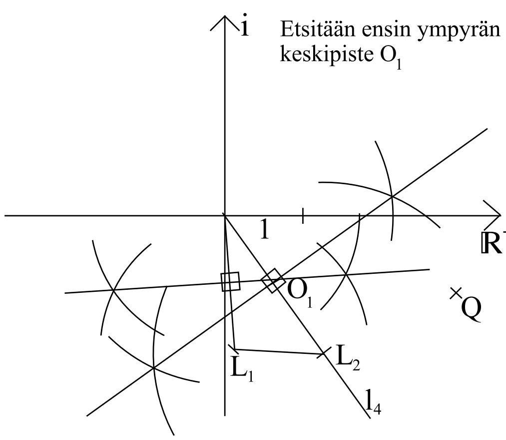
Kuva 17: Askel 4.3.1



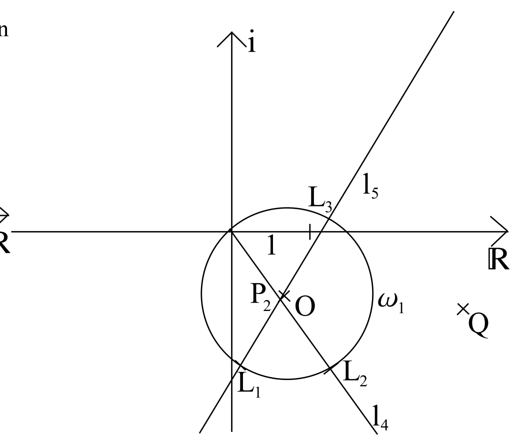
Kuva 18: Askeleet 4.3.2-3



Kuva 19: Askeleet 4.3.4-6



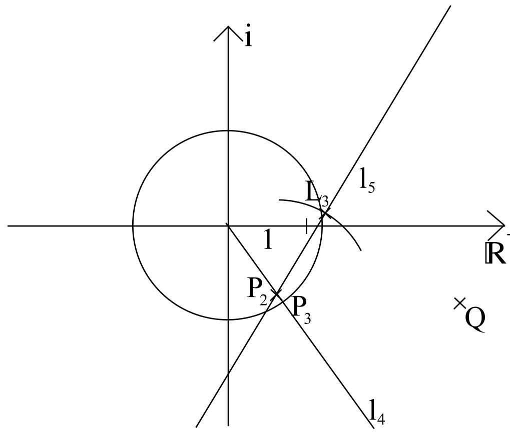
Kuva 20: Askel 4.3.7a



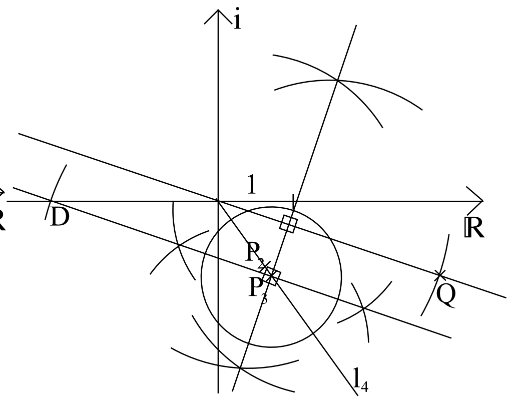
Kuva 21: Askel 4.3.7b

4.4 Ratkaisujen saaminen

1. Merkitään vektorin OD suuntaista suoraa l_6 ja puolitetaan sen ja x-akselin välinen kulma (Luku 2.3). Merkitään kulmanpuolittajan suuntaista suoraa l_7



Kuva 22: Askel 4.3.8



Kuva 23: Askel 4.3.9

2. Erotetaan l_6:lta yksikköjana DL_4, jolle pätee $|OL_4| = |OD| + 1$

3. Piirretään l_6:lle normaali l_7 pisteen D kautta (Luku 2.5)

4. Piirretään ympyrä ω_2, jonka halkaisija on OL_4 ja keskipiste OL_4:n ja OL_4:n keskinormaalin leikkauspiste (Luku 2.7). Merkitään ω_2:n ja l_7:n leikkauspisteitä L_5 ja L_6.

5. Siirretään jana DL_6 suoralle l_7 janoiksi OQ_2 ja OQ_3, joille pätee $|OQ_2+OQ_3| = 2|DL_6|$

6. Siirretään vektori OP_1 alkamaan pisteestä Q_2 vektoriksi Q_2X_1, jonka suunta on vastakkainen vektorin OP_1:n kanssa (Luku 2.6).

7. Siirretään vektori OP_1 alkamaan pisteestä Q_3 vektoriksi Q_3X_2, jonka suunta on vastakkainen vektorin OP_1:n kanssa (Luku 2.6).

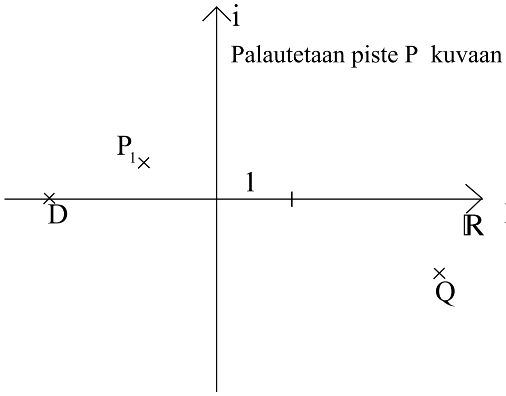
Saadut X_1 ja X_2 toteuttavat annetun toisen asteen yhtälön $AX^2 + BX + C$.

Tarkistetaan algebrallisesti esimerkkitehtävän vastaus. Tehtävänä on ratkaista yhtälö $(4,-3)x^2 + (-5,10)x + (9,-13)$. Geometrisessa tarkastelussa yksiköksi voitiin valita A:n etäisyys origosta, mutta algebrallisessa tarkastelussa saadaan valinnalla $\frac{|A|}{5}$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Tutkitaan toteuttavatko geometrisella tarkastelulla saadut juuret $(1,1)$ ja $(1,-2)$ yhtälön.

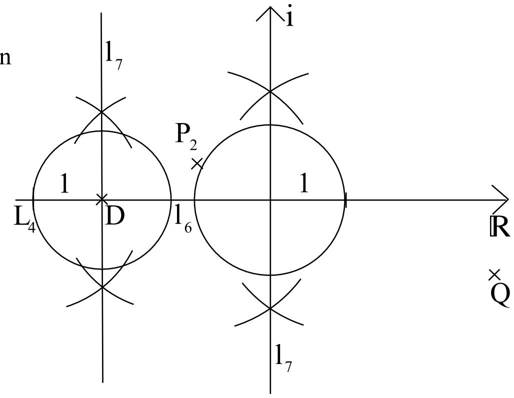
$$(4,-3)(1,1)^2+(-5,10)(1,1)+(9,-13) = (4,-3)(0,2)+(-15,5)+(9,-13) = (6,8)-(6,8) = 0$$

ja

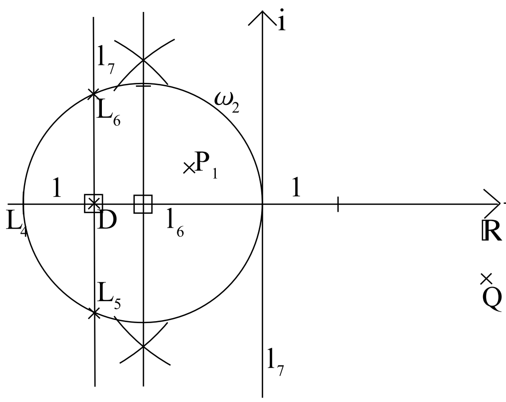
$$(4,-3)(1,-2)^2 + (-5,10)(1,-2) + (9,-13) = (4,-3)(-3,-4) + (15,-25) + (9,-13)$$



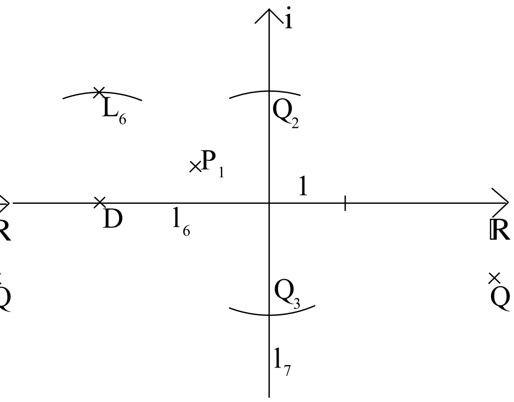
Kuva 24: Lähtötilanne 4.4



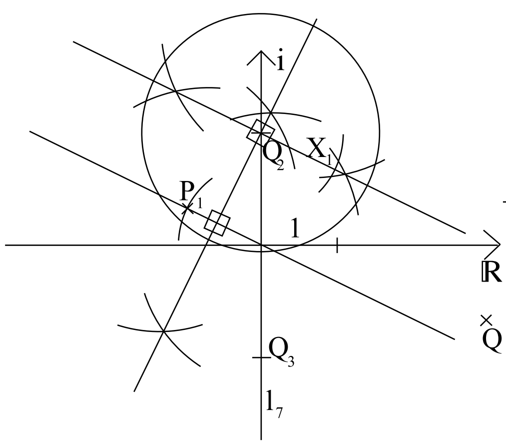
Kuva 25: Askeleet 4.4.1-3



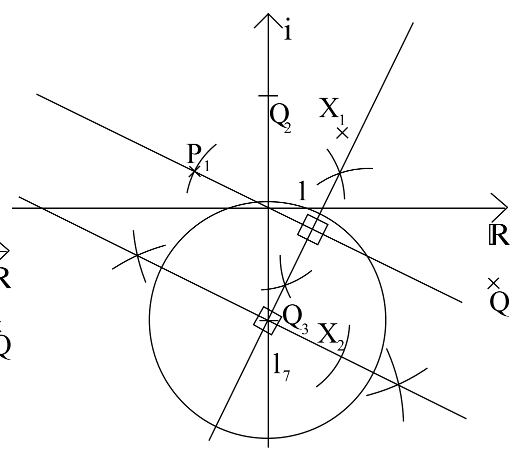
Kuva 26: Askel 4.4.4



Kuva 27: Askel 4.4.5



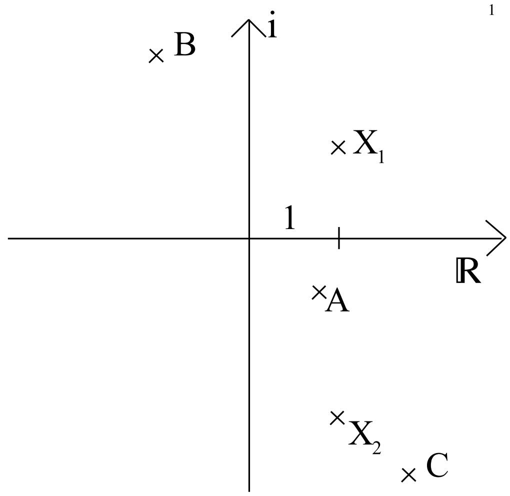
Kuva 28: Askel 4.4.6



Kuva 29: Askel 4.4.7

$$= (-24, -7) + (24, 7) = 0$$

Geometrinen ja algebrallinen ratkaisu ovat luonnollisesti samat.



Kuva 30: Ratkaisut

5 Loppusanat

Kompleksikertoimisen toisen asteen yhtälön ratkaisemiseksi kehitetty geometrinen ratkaisu koostuu hyvin yksinkertaisista askeleista, joiden suorittaminen toinen toisensa jälkeen johtaa lopulta oikeaan lopputulokseen. Menetelmän kauneus onkin sen vaatimattomassa välineistössä.

Harpilla ja viivaimella tehtäviä konstruktioita on mitä moninaisimpia ja niistä löytyy pohdittavaa kaikentasoisille ja -ikäisille matemaatikoille. Algebralliselta vaikuttavan kompleksilukukertoimisen toisen asteen yhtälön ratkaisukin kuuluu tällaisten ongelmien joukkoon, vaikkakin tässä esitetty ratkaisualgoritmi pohjautuu algebraan.

Tämä ratkaisu perustui peruslaskutoimitusten konstruointiin harpilla ja viivaimella sekä algebrallisen ratkaisun muokkaamiseen geometriseksi. Jatkotutkimuksen aiheeksi sopisi kysymys, voiko tehtävän ratkaista harpilla ja viivaimella elegantimmin.

Viitteet

[1] **Boyer, Carl.** (1995) Tieteiden kuningatar Matematiikan historia osa I. WSOY, Juva.

[2] **Kontkanen Pekka, Liira Riitta, Luosto Kerkko, Nurmi Juha, Nurmiainen Riikka, Ronkainen Anja ja Savolainen Sisko.** (2000) Pyramidi Matematiikan tietokirja 2. Karisto Oy, Hämeenlinna.