



# **Reaaliluvut: keksitty vai löydetty käsite?**

**Filosofisesti tuettu reaalilukujen johdatus klassisen joukko-opin aksioomista.**

**Vadim Kulikov**

**Ressun lukio**

**Työ sijoittuu kahdelle tieteenalalle:  
matematiikka ja filosofia.**

## Sisällysluettelo

<b>Etusivu</b>	s.1
<b>Sisällysluettelo</b>	s.2
<b><u>Tiivistelmä</u></b>	s.3
<b><u>Johdanto</u></b>	s.3
<b><u>Mitä matematiikka on?</u></b>	s.4
<b><u>Entä maailma?</u></b>	s.4
<b><u>Aksiomaattinen lähestymistapa</u></b>	s.4
<b><u>Mikä on varmaa?</u></b>	s.5
<b><u>Olemassaolo</u></b>	s.5
<b><u>Aksioomistani</u></b>	s.6
<b><u>Äärettömyys</u></b>	s.6
<b><u>Zermelon aksioomat</u></b>	s.7
<b><u>Johdanto matemaattiseen tekstiin</u></b>	s.8
<b><u>Matematiikka</u></b>	s.9-20
<b><u>Joukko-opin alkeet</u></b>	s.9
<b><u>Propositiologiikan merkinnät ja käsitteet</u></b>	s.11
<b><u>Analyyysin käsitteet: karteeminen tulo ja kuvaus</u></b>	s.11
<b><u>Luonnolliset luvut</u></b>	s.13
<b><u>Järjestysrelaatio</u></b>	s.14
<b><u>Lukumäärä</u></b>	s.15
<b><u>Yhteenlasku</u></b>	s.17
<b><u>Kokonaisluvut</u></b>	s.18
<b><u>Rationaaliluvut lyhyesti</u></b>	s.20
<b><u>Reaaliluvut</u></b>	s.20
<b><u>Järjestysrelaatio</u></b>	
<b><u>Yhteenveto</u></b>	s.22
<b><u>Lähteet</u></b>	s.23

## Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoituksena oli – karkeasti sanottuna – selvittää, kuinka tarkkaa, täsmällistä ja ennen kaikkea varmaa tietoa matematiikassa on. Kysymys herää siitä, että eihän meillä ole mitään lukuja. Meillä toki voi olla kaksi puhelinta tai seitsemän koiraa, mutta nämä ovat puhelimia ja koiria, missä ovat kaksi ja seitsemän? Ovatko ne vain päästä heitettyjä symboleja esittämään joitain yleisiä asiointiloja, jotka ovat kuitenkin vallanneet meidän päät ja me elämme niiden sisällä, vai onko kenties itsestään selvää tällaisten käsitteiden, kuin kaksi, seitsemän – tai jopa kaksi ja puoli – olemassa olo? Itsestään selvällä tarkoitan tässä sitä, että se seuraisi joistain paljon yksinkertaisimmista ja varmemmista olettamuksista. Työn alussa yritän selvittää nimenomaan mitä kaikkea voidaan pitää varmana tai joudutaan pitää varmana, jotta ylipäätään mitään voitaisiin mistään päätellä.

Tutkielmaa aloittaessani päädyin tutkimaan aksiomaattista joukko-oppia, jonka tavoitteet ovat hyvin lähellä minun tavoitteitani. Lähteinä käytin aksiomaattisen joukko-opin kirjoja, yliopiston cum laude approbatur ja laudatur –tasoisten kurssien oppikirjoja, filosofisia tuotoksia, kuten Wittgensteinin Tractatus [8] sekä voimakkaasti nykyiseen matematiikkaan ja metamatematiikkaan vaikuttanut *Principia Mathematica* [7].

Suurin osa työstä on puhdasta matemaattista johdatusta perustellusti valituista aksioomista. Aloitan tyhjästä, liikkumatilaa ei ole. Ensin muovaan peruskäsitteet, kuten joukkojen toisiinsa suhtautumiset, relaatiot ja kuvaukset. Sitä myötä, kun työkaluja tulee käyttöni lisää, hyödynnän niitä ja pääsen yhä nopeammin ja nopeammin eteenpäin. Alun perin aloitin laajan projektin, jossa tarkoituksena olisi johtaa matematiikkaa niin pitkälle kuin elämää riittäisi. Kuitenkin tein tämän rajatun version, (todennäköistä on, että jatkan tätä vielä) jossa rajaan päämääräni reaalityökalujen ja joidenkin niiden ominaisuuksien johtamiseen. Tämä on erittäin hyvä esimerkki siitä, miten matematiikassa – myös luvut – ovat todellakin varmoja käsitteitä: riittää olettaa hyvin vähän hyvin vaikeasti epäiltävää, jotta saataisiin iso järjestelmä totuuksia.

[Alkuun](#)

## Johdanto

Matematiikkaa opiskeltuani ja vähän ymmärrettyäni tulini ajatelleeksi, että matematiikan yksi kauneimmista ominaisuuksista on se, että siinä ei ole mitään epävarmaa tietoa – tieto on matematiikassa logiikan voimin logiikan (järkemme) suhteen kovaa kuin kivi. Tajusin, että yksi asia, joka aikoinaan sai minut syventymään juuri matematiikkaan on se, että matematiikassa jokaiseen asiaan olen aina saanut perustelun – jos ei kysymällä, niin päättämällä ja perustelun ymmärrettyä käsittää, että asia ei voi olla toisin, vaan se on välttämättömyys.

Olen nähnyt paljon matemaattisia johdatuksia ja todistuksia ja jossain vaiheessa rupesin miettimään, että olisi hienoa johtaa koko tietämäni matemaattinen järjestelmä joistain perusoletuksista. On selvää, ettei voi loputtomiin selittää käsitteitä, jo sen takia, että sanoja on äärellinen määrä. On siis oltava peruskäsitteitä, joita ei tarvitse selittää, aksiomia.

Työni jakautuu kahteen osaan. Ensimmäisessä pohdin asiaa filosofisesta näkökulmasta ja pyrin perustelemaan asetetut aksiomat. Toinen osa on matemaattinen esittely – aksiomien avulla määrittelen vähitellen käsitteitä, todistan lauseita pyrkien näyttämään, että kaikki on vain aksiomien erilaisten toisiinsa suhtautumistapojen nimeämistä ja pyörittelyä. Kuitenkin rajoitun johtamaan näistä aksiomista reaalityökalut ja jätän muut mahdollisuudet maininnaksi.

[Alkuun](#)

## Mitä matematiikka on?

Matematiikan avulla voidaan mallintaa luonnonilmiöitä, taloudellisia, lääketieteellisiä ja tieteenkin tilastotieteellisiä prosesseja. Itse asiassa näissä tapauksissa ei tutkita matematiikkaa, vaan näitä asioita matematiikan keinoin. Matematiikka on tähän soveltuva ajattelu- tai asioiden järjestyttävä tapa. Se matematiikka, jota sovelletaan näihin käyttötarkoituksiin sijaitsee ikään kuin aivan meren pinnalla, jossa meri kuvastaa kaikkea matemaattista tutkimusta, mitä ihmiset ovat tehneet. Puhdas matematiikka tutkii käsitteitä hyvin yleisellä tasolla ja samalla varsin monimutkaisesti ja tuottaa uusia ja uusia yleisiä asioita koskevia totuuksia. Jokainen matematiikan lause on todistettava ennen käyttöön ottamista ja jokainen määritelmä on ilmaistava selkeästi aikaisemmin määriteltujen käsitteiden avulla. Emme voi määrittellä asiaa  $a$  asian  $b$  avulla jos  $b$  on määritelty asian  $a$  avulla, sillä silloin syntyy kehäpäätelmä, eikä ole ollenkaan selvää mitä  $a$  ja  $b$  edes ovat. Käsitteen määrittelyssä ei siis saa käyttää itse käsitettä eikä sen avulla määriteltyjä käsitteitä. Edellä todettiin, että on oltava jotkin (perus-)käsitteet, joista tämä ketju alkaa.

Matematiikan kielellinen rakenne ansaitsee myös huomiota. Matematiikan kielessä mikään sana ei ole epätäsmällinen. Jokainen termi on tarkoin määritelty, jolloin ei voi tulla näennäisparadokseja, kuten esimerkiksi ”miten on mahdollista, että kuu kiertää akselinsa ympäri, jos emme näe koskaan sen toista puolta?”, joka on vain sanan ”kiertää” epätäsmällistä tulkintaa. (ks. [3], s. 59, *The Great Moon Mystery*). Tätä työtä lukiessa on siis syytä pitää mielessä, että mikään sana ei merkitse yhtään mitään sen enempää kuin mitä määritelmässä on sanottu. Esimerkiksi joukon osajoukko ei välttämättä kuulu joukkoon, vaikka kielellisesti sen voisi niin tulkita.

[Alkuun](#)

## Entä maailma?

Jokainen meistä havainnoi ympärillään olevaa maailmaa. Havaintomme ovat isommassa mittakaavassa miltei samanarvoisia, mikä mahdollistaa omien havaintojemme välittämistä toisille kielten avulla. Kuitenkin se, mitä maailma on *minun* mielestäni on kaikki, se mikä aivoihini on tähän asti kuvautunut ja se, mikä on saattanut syntyä näiden asioiden yhdistelminä. Esimerkiksi Ludwig Wittgenstein (1889-1951) kirjoitti [8], että maailma on tosiseikkojen kokonaisuus, mikä vastaisi tässä tapauksessa sanottua. Tiedämme, että aivomme ovat kykeneviä tuottamaan mielikuvia, jotka eivät ole mitään, mitä tähän asti on aistittu, esimerkiksi voin kuvitella katollani kävelevän leopardin. Tämä mielikuva on yhdistelmä aiemmin aistitusta. Miten voimme sitten olla varmoja joistain muista ajatuksiemme tuotoksista? Vastauksen tähän kysymykseen antaa tieteiden (*tosien* ajatusten) aksiomatisointi. Aksiomisoitu järjestelmä on joukko lauseita, joista osa on aksiomia (todeksi sovittuja lauseita, jotka eivät kaipaa perustelua) ja osa näistä aksiomista johdettuja lauseita. Lauseissa toki käytetään aksiomien avulla määriteltyjä käsitteitä, jotta lauseista saataisiin (mahdollisimman) yksinkertaisia. Ottamalla aksiomiksi joidenkin asioiden olemassaolo sekä tapa, jolla jotkut lauseet seuraavat toisista, saadaan tällainen järjestelmä. Aksiomiksi täytyy valita sellaiset asiat, joista olemme eniten varmoja ja samaa mieltä ja niitä täytyisi olla mahdollisimman vähän, jotta systeemi olisi helppo ja todenmukainen. Jos olemme aksiomista ja johdatustavoistamme varmoja, niin niistä johdetuista asioista emme myöskään voi olla muuta kuin varmoja. Tällaista järjestelmää kutsun mielelläni (*matemaattiseksi*) *universumiksi*.

[Alkuun](#)

## Aksiomaattinen lähestymistapa

Vielä 1800-luvulla matemaatikot käyttivät niin sanottua naiivia lähestymistapaa, jossa täsmällisten todistusten esittämistä pidettiin naurettavana, koska asiathan olivat ”itsestään selviä”. Jokainen joukko, joka voitiin ilmaista oli myös olemassa. Kukaan ei epäillyt, että jos sanoo ”kaikki asiat, joilla on tietty ominaisuus” niin nämä kaikki asiat voidaan ristiriidattomasti esittää. [2] Kun

tätä metodologia sovellettiin asioiden perin pohjaiseen tutkimiseen törmättiin välittömästi tämän ajattelutavat tuomiin virheisiin. Esimerkkinä niin kutsuttu Russellin paradoksi:

*Olkoon  $f$  kissa, joka rakastaa kaikkia niitä ja vain niitä kissoja, jotka eivät rakasta itseään. Rakastaako  $f$  itseään?*

Vaikka näennäisesti ilmaistiin rakastettavien kissojen joukko, emme voi ristiriidatta sanoa kuuluuko  $f$  niiden joukkoon vai ei, sillä ” $f$  rakastaa itseään” tarkoittaa, että se ei rakasta itseään ja toisinpäin. Yksi ensimmäisistä ja nykykäsitykseen paljon vaikuttaneista teoksista, jossa tätä ongelmaa yritettiin ratkaista, on *Principia Mathematica* [7]. Siinä tekijät päättivät johtaa ”itses-tään selvät” säännöt ja metodit aksioomista karsien samalla pois kaiken, mikä tuotti ristiriitoja. Näin alkoi syntyä aksiomaattinen joukko-oppi ja ylipäätään moderni lähestymistapa matematiikkaan.

Minä käytän tässä vain osaa niistä aksioomista, jotka ovat välttämättömiä tiettyjen analyysin peruskäsitteiden luomiseksi. Esimerkiksi valinta-aksioomaa ja aksioomaa siitä, että joukko ei voi sisältää itseään, jätän käyttämättä. Tarkoitukseni on ensinnäkin johtaa reaalilukujen olemassaolo ja niiden ominaisuudet näyttäen, että nämä seuraavat välttämättömyyksiä jo muutamasta aksioomasta. Reaaliluvut eivät siis ole tavallaan mitenkään keksittyjä eikä niiden olemassaoloa tarvitse olettaa eikä epäillä – se seuraa jo paljon yksinkertaisimmista seikoista. Tämä tavallaan esimerkkinä siitä, miten pitkälle voidaan mennä pelkällä loogisella päättelyllä.

[Alkuun](#)

## Mikä on varmaa?

Jo Descartes pohti, että mitään tosiasiaa ei voida pitää täysin varmana, paitsi mahdollisesti se, että jotain on olemassa (ks. seuraava kohta), mihin taas liittyy olemassaolon käsityksen intuitiivisuus. Aksiomien esittäminen ja käyttöön ottaminen täytyy tapahtua intuitiivisesti, koska tajuntamme on intuitiota ja kaikki mitä tajuntamme voi kehittää loppujen lopuksi perustuu siihen. Emme voi määritellä aksiomia millään muullakaan tavalla. Ainoa edellytys oikeastaan on se, että lukijalle aksiomat käyvät selväksi. Merkityksetöntä on se, tapahtuuko se intuition kautta vai jollakin muulla tavalla.

Kun aloitin, minulla oli kolme aksioomaa. Luulin päässeeni sillä pitkälle, mutta lukiessani [1] johdannon tajusin, että olin olettanut monen asian olemassaolon esittämättä näitä olettamuksia aksiomina. Aksiomina olivat 1) Maailman olemassaolo 2) Maailman osien (olioiden) olemassaolo ja 3) Joukkojen olemassaolo. Tajusin esimerkiksi, että oletin myöhemmin määrittelemäni tyhjän joukon olemassaolon. Siinä ei ole ristiriitaa, mutta tämä oletus olisi ollut syytä mainita. Itse asiassa tällainen oletus on aksioma. Jouduin siis muuttamaan hieman aksiomieni joukkoa. Huomasin esimerkiksi, että maailman olemassaoloa ei tarvitse olettaa eikä tarvitse kahta käsitettä – oliot ja joukot, vaan riittää yksi: joukot. Valitettavasti huomasin miettimisen jälkeen, että joudun melkein kopioimaan aksiomat kirjasta [1]. Kirjan tavoitteet ovat erilaiset kuin minun – laajemmat ja keskittyvät eri asioihin. En tarvitse edes kaikkia siellä mainittuja aksiomia päämääräni saavuttamiseksi.

[Alkuun](#)

## Olemassaolo

Mitä on olemassaolo? Olemassaolo on täysin intuitiivinen käsite. Kun sanomme ”tämä kirja on olemassa, koska me kaikki näemme, että se on tuossa” tarkoitamme, että jokaisen meistä aivo-kuorelle muodostuu jokin kuva, jonka jokainen meistä tulkitsee kielellisesti lauseeksi ”tämä kirja on olemassa”. Oikeasti juuri sellaista kirjaa ei välttämättä ole olemassa, minkä kuva on aivois-

samme. Siitä kertoo jo esimerkiksi se, että jokaiselle syntyy hieman erilainen kuva kirjasta. Mikä sitten *oikeasti* on olemassa? Lähestyn problematiikkaa siltä kannalta, että on olemassa vain minun mielikuviani. Niiden olemassaolosta voin olla melko varma. Mielikuviani voin (yrittää) siirtää toisille kielen avulla. Tämän takia sanon, että olemassa on kaikki kuviteltavissani oleva. Mutta kuviteltavissa oleva rajoittuu siihen, mitä me voimme esittää lauseessa ja mitä ei. Tarkastelussani siis asia on olemassa a) jos sen olemassaolo on aksioma; b) jos se voidaan esittää aksiomien kanssa ristiriidattomasti (mutta ei kuitenkaan riippumattomasti).

[Alkuun](#)

## Aksiomistani

Ochamin partaveitsiperiaate ja ihan intuitiivinen käsityskin sanovat: 1) aksiomat eivät saa olla toisistaan johdettavissa. 2) aksioman oltava sellainen, ettei yksinkertaisempaa samaa asiaa tarkoittavaa tosiasiaa voisi esittää. Muuten se yksinkertaisempi pitäisi ottaa aksiomaksi.

Aksiomat määräävät universumin muodon ja rakenteen. Tärkeintä on jonkun olemassaolo. Meidän tapauksessamme olemassa on joukkoja (aksioma 1). Ihan sama, millä nimellä me näitä olemassa olevia asioita kutsumme, sillä mitään muuta ei kuitenkaan ole olemassa, mutta joukko sopii hyvin intuitiivisen joukon hahmon kanssa. Jotta näistä olemassa olevista asioista, joukoista, voisi mitään rakentaa on oltava jokin sääntö tai mekanismi, jonka avulla se käy: joukkojen toisiinsa suhtautuminen. Nyt jokaisella joukolla on mahdollisuus suhtautua toiseen joukkoon tietyllä tavalla: kuulua siihen. Määräämme myös, että kuuluvuus ja ei kuuluvuus ovat toisiaan poisulkevia asioita, joista yksi aina vallitsee (aksioma 2). Jotta näitä aksiomia ja sääntöjä voi esittää, meidän on määriteltävä implikaatio: ”jos... , niin ...” –lauserakenne. Ilman tätä rakennetta ei voi esittää muita aksiomia kuin ensimmäisen lauseista puhumattakaan. Voisi kuvitella, että turha minun on tällaista määritellä – joudunhan kuitenkin käyttämään kieltä sellaisena kuin se on, mutta katsoin, että implikaatio on se logiikka, se sääntö, joka on edellytys struktuurin tuottamiselle; kausaaliteetti, syuseuraussuhde. On tarve määritellä mikä se on, ennen kuin voidaan hyvällä omatunnolla käyttää sitä. (Määritelmät 0.1 ja 0.2)

Seuraavaksi on määriteltävä, millaisia joukkoja (ainakin) on konkreettisesti olemassa (aksiomat 3 – 7). Nämä eivät yksinään kerro mitään, mutta yhdessä aksioman 1 kanssa (jonka nojalla ainakin tyhjä joukko on olemassa, jolloin voidaan laittaa se aksiomiin olemaan se joukko, jonka olemassaolo edellytetään muiden olemassaoloksi) voidaan päätellä jo tiettyjen joukkojen olemassaolo.

Lähteinä käytin lähdeluettelossa mainittuja kirjoja ja Internetsivustoja. Kirjat ovat joko omiani tai lainassa Helsingin Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen kirjastosta. Tutkimani teoriat ovat pääosin kehitetyt viime vuosisadan puolivälissä. Sen jälkeen ne ovat alkaneet modernisoitua, mutta aksiomaattinen lähetymistapa alkoi juuri silloin.

[Alkuun](#)

## Äärettömyys

”Jotain, mitä on tosi paljon.” Onko olemassa mitään, mitä olisi todella äärettömästi, jos jopa alkeishiukkasten määrä universumissa arvioidaan olevan noin  $10^{88}$  (ei siis ääretön)? Onko äärettömyysaksioma hatusta vedetty, ihmisen keksimä asetelma, jolla ei ole mitään perää? Oikeastaan ei: äärettömyyksiä voidaan ajatella olevan lähistöllämme joka hetki. Kuinka monella eri etäisyydellä sijaitseen maapallon keskipisteestä sillä aikavälillä, kun nousen hissillä kerroksen ylöspäin? Äärettömän monella. Kuinka monella eri tavalla voin toimia seuraavat kaksi sekuntia? Äärettömän monella. Näitäkin väitteitä voi kumota: etäisyyksien määrän laskeminen jo edellyt-

tää, että etäisyyksiä on olemassa (etäisyys on aika intuitiivinen kahden erillisen asian suhde), ettei maailma ole esimerkiksi diskreetti, jolloin etäisyyksiä muutenkin olisi äärellisesti; jos pidättydymme determinististä maailmankuvaa, mahdollisuuksia olisi täsmälleen yksi – se joka toteutuu. Mutta matematiikassa käsitelläänkin mahdollisuuksia: numeroita tarvitaan sitä varten *äärettömästi*, jotta olisi *mahdollista* kuvata minkä suuruisia tahansa joukkoja. Vaikka alkeishiukkasia on  $10^{88}$ , voimme valita niistä  $2^{10^{88}}$  erilaista alkeishiukkasten joukkoa jne.. Tämän jälkeen on myös laskettava montako erilaista *numeroiden* osajoukkoa voidaan valita (=on olemassa). Näin saadaan vielä mahtavampi äärettömyys.

Ääretöntä käytetään esimerkiksi tilanteessa, jossa kiinnostavaa on, mitä jonkun funktion arvot lähestyvät sen argumentin *kasvaessa rajatta*, jossa on mukavaa myös ajatella sen *lähestyvän ääretöntä*.

Ensimmäisen äärettömän joukon olemassaolo vaatii oman aksioomansa (aksiooma 7), koska aksioomasta 6 ei seuraa, että voidaan yhdistää ääretöntä määrää joukkoja. Tämä vaikka ääretöntä ei ole määritelty. Täsmällisemmin: kaikkien äärellisten joukkojen luokka muodostaa suljetun systeemin aksioomien 1-6 suhteen. Toisin sanoen nämä aksioomat eivät implikoivat sellaisen joukon olemassaoloa, joka ei olisi äärellinen määritelmän 5 mukaan. [1]

[Alkuun](#)

## Zermelon aksioomat

Saksalainen matemaatikko Ernst Zermelo (1871-1953) [9, 10] kehitti paradoksien välttämiseksi muutaman joukko-opin aksiooman, joista oli tarkoitus olla mahdollista rakentaa koko sen ajan matematiikka välttymättä paradokseista, joiden syntyperä on kielen epätasällinen käyttö. Tätä systeemiä korjasi vielä Adolf Fraenkel (1891-1965) [9, 10], joka muun muassa todisti valinta-aksiooman (maininta alempana) riippumattomuuden muista aksioomista.

Myöhemmin todettiin, että täydellisempi teoria vaatii luokkien käyttöä, ts. joukkojen, joiden ei tarvitse toteuttaa kaikkia aksioomia. Kuitenkin Zermelon aksioomat ovat filosofisesti varteen otettavia ja varsin päteviä johtamaan reaaliluvut, näennäisesti, ei mistään. Näin päädyinkin käyttämään Zermelon aksioomia. Kaikkia aksioomia en käytä, kun ei ole aiheessa tarpeen. Esimerkiksi kuuluisuutta saavuttanutta valinta-aksioomaa: *Olkoon  $t$  epätyhjien joukkojen joukko. Tällöin on olemassa joukko, johon kuuluu täsmälleen yksi alkio jokaisesta joukon  $t$  jäsenestä.* Voidaan siis ”valita” jokaisesta yksi alkio. [1, 9] Tämä on tärkeä aksiooma, joka on välttämätön esimerkiksi joukkojen mahtavuuksiin (suhteelliseen kokoon) liittyviä tuloksia todistaessa.

Systemini poikkeaa Zermelon systeemistä kuitenkin vielä muutamalla tavalla:

- Aksiomatisoin, aksioomassa 1, joukkojen olemassaolon ylipäättään, koska en halua, että kyse on siitä, että rakennetaan olemassa olevia joukkoja tyhjän joukon ja muiden aksioomien avulla, vaan ikään kuin löydetään niitä joukkoja olemassa olevien joukkojen seasta niiden (muiden aksioomien) avulla.
- Jotkut käyttämäni aksioomat ovat Zermelon aksioomien erikoistapauksia. Esimerkiksi en halua käyttää *osajoukon aksioomaa*:

*Olkoon  $a$  joukko. Tällöin jokaista joukon  $a$  kaikille alkiolle mielekästä väitettä kohti on olemassa se joukon  $a$  osajoukko, jonka kaikki alkiot tekevät väitteestä toden.* [1, 9]

Tämä nimittäin on tarkoitukseeni liian laaja ja se vaikuttaa jotenkin holtittomalta. Mistä tiedämme, että väite on mielekäs jokaiselle joukon  $a$  alkiolle? Ainoa mielekäs väite tekstissäni on ”joukko  $a$  kuuluu joukkoon  $b$ ”. Muut ovat tämän sovellutuksia. Käyttäisin tätä aksioomaa esittäkseni vain muutaman tosiasian, joten mieluummin otan nämä muutamat

aksiomiksi. Sen sijaan sanon, että jokainen osajoukko on olemassa, mutta vaikenen siitä, miten se suhtautuu *mielekkäisiin väitteisiin*.

[Alkuun](#)

## Johdanto matemaattiseen tekstiin

Aloitin määrittelemällä implikaation sekä toden ja epätoden käsitteet. Tämän jälkeen aksiomien ja lauseiden esittäminen on jotenkin mahdollista. Sitten vähitellen määrittelen uutta käsitteistöä: annan nimiä aksiomien johdosta olemassa oleville joukoille ja myös niille, jotka eivät välttämättä ole olemassa; todistan lauseita (käytännössä siis todistan, että aksiomista seuraa sellaisten ja sellaisten joukkojen olemassa olo). Tekstin kuluessa tulee esille muutama uusi aksioma asiayhteyteen liittyen. Esimerkiksi äärettömyysaksiomaa ei tarvinnut mainita aikaisemmin, kuin oli tarpeeksi käsitteistöä operoimaan luonnollisten lukujen kanssa.

Suurin osa lauseista on apulauseita joidenkin isompien tulosten varalle. Todistukset olen laatinut miltei poikkeuksetta itse. Tämän takia ei tarvitse etsiä niiden perästä viitteitä. Todennäköisesti moni todistus on sellainen, että olen sen jostain joskus lukenut ja sen takia sen todistaminen ei ollut liian hankalaa, mutta tässä tapauksessa lähteen muistaminen on vielä hankalampaa.

Sivun reunassa pyrin tarpeen mukaan antamaan vähän selkoa siitä, mitä on käynnissä. Väliotsikot myös auttavat suunnistamisessa. Väliotsikot ovat merkitty keskelle sivua ja niiden alaotsikot vasemmalle reunalle. Määritelmällä tai lauseella on numero siinä tapauksessa, jos myöhemmin viittaa kyseiseen määritelmään tai lauseeseen.

[Alkuun](#)

## Matematiikkaa

### Joukko-opin alkeet

Välttämättömät kaksi määritelmää, joita ilman muitakaan aksiomioita ei voisi tuottaa ja joka on kaiken kielellisen ilmaisun alku tässä työssä.

Seuraavaksi ensimmäinen aksioma, joka esittää *jonkun* olemassaolon. *Jonkun* on oltava olemassa, voidaksemme jatkaa.

Seuraavaksi määritellään olemassa olevien asioiden (joukkojen) yhteys – mahdollisuus rakentaa. Yhteyden on *mahdollista* olla olemassa, muuta määritelmä ei sano.

Repliikin ”joukoille  $a$  ja  $b$  on olemassa niiden välinen yhteys” sijasta sanotaan ”joukko  $a$  kuuluu joukkoon  $b$ ”

Sitten aksioma, joka antaa rakennelmalle kulmakiven. Tyhjästä joukosta tehdään peruskäsite. Se on jokin johon voi tarttua kiinni ja toisaalta olisi aika epäintuiivista, jos joukko ei voisi olla tyhjä: miksi jokaista joukkoa kohti pitäisi aina olla olemassa jokin joukko, jolla on mainittu yhteys edelliseen?

Määritelmä 3 – ehkä tärkein käsite koko systeemissä.

Määritelmä 0.1: *Väitelause* (tai *lause*) on muotoa ”On olemassa olio, joka ...”. Lauseen vastalause on ”Ei ole olemassa oliota, joka ...”. Lauseesta ja vastalauseesta aina toinen on tosi ja toinen epätosi riippuen siitä, kumpi väittää samaa kuin jokin aksioma.

Huomautus: Aksiomat ovat puolestaan valittu siten, ettei lause ja vastalause voi molemmat olla tosia. Tilanne voi kuitenkin olla epäselvä, jos esimerkiksi mikään aksioma ei väitä samaa kuin lause tai sen vastalause, mutta tässä tapauksessa lauseella ei olekaan kyseisessä universumissa totuusarvoa, eikä sitä tarvitse ottaa huomioon. Lause on silloin *mieletön*.

Määritelmä 0.2: Merkkiyhdistelmä ”Jos  $x$ , niin  $y$ ” (merkit  $x$  ja  $y$  voi korvata lauseella) vastaa intuitiivista merkitystään, tarkoittaen, että lauseen  $x$  ollessa tosi, myös  $y$  on tosi.

Aksioma 1: On olemassa joukkoja.

Määritelmä 1: Jos  $a$  ja  $b$  ovat joukkoja, niin ” $a$  kuuluu joukkoon  $b$ ” on niiden välinen yhteys, joka on olio. Sille siis määritelmän 0.1 nojalla pätee olemassaolon poissulkeva ominaisuus.

Kommentti: Emme vielä (välttämättä) tiedä, mitä nämä käsitteet ”joukko” ja ”kuuluu” tarkoittavat, eikä sillä ole merkitystä, kunhan muistamme tämän poissulkevan säännön.

Aksioma 2: On olemassa tyhjä joukko, jolle kaikilla joukoilla  $a$  pätee (on tosi):  $a$  ei kuulu tyhjään joukkoon.

Määritelmä: Jos joukko  $x$  kuuluu joukkoon  $A$ , niin  $x$  on joukon  $A$  *alkio* tai *jäsen*.

Määritelmä 2: Joukko  $a$  on joukon  $b$  *osajoukko* jos joukon  $a$  jokainen alkio kuuluu joukkoon  $b$ .

Lause 1: Joukko  $a$  ei voi olla molempia: sekä joukon  $b$  osajoukko että ei.

Todistus: Seuraa määritelmästä 1 ja osajoukon määritelmästä.  $\square$

Merkintöjä:  $a$  kuuluu joukkoon  $A$ :  $a \in A$ ; muutoin  $a \notin A$ ; joukko  $A$  on joukon  $B$  osajoukko:  $A \subset B$ ; muutoin  $A \not\subset B$ ; tyhjä joukko:  $\emptyset$ .

Määritelmä 3: Jos joukko  $a$  on joukon  $b$  osajoukko ja  $b$  on joukon  $a$  osajoukko, niin  $a$  ja  $b$  ovat *sama* joukko. Merkitään  $a = b$ . Erityisesti  $\emptyset = \emptyset$ .

Määritelmä 4: Määritellään nyt *väitelause* helppouden vuoksi uudestaan: merkkiyhdistelmät  $a = b$  ja  $a \in A$ , joissa  $a$ ,  $b$  ja  $A$  ovat joukkoja, ovat *väitelauseita*. Lauseiden vastalauseet ovat  $a \neq b$  ja  $a \notin A$ . Tosi ja epätosi määräytyvät nyt määritelmillä 1 ja 3.

Teoksen tarkoituksena on tarkastella oheisen mukaisia *tosia* lauseita. *Epätosilla* ei niinkään ole väliä. Jos edempänä sanotaan, että asiointila on niin ja näin (esim. lauseessa tai todistuksessa), tarkoitetaan, että lause ”asiointila on niin ja näin” on tosi. Kaikki käytetyt lauseet ovat sellaisia, että ne on mahdollista muokata määritelmän 4 muotoisiksi lauseiksi merkityksen siitä kärsimättä.

Kuvassa 1 on esimerkki siitä, miten joukkojen olemassaolo ja yhteydet voidaan esittää kaaviolla ja miten ”uusien” joukkojen olemassaolo seuraa tästä aksioomien avulla.

Aksioomasta 6 ei esimerkiksi seuraa, että kaikkien joukkojen joukko olisi olemassa. Voidaan jopa osoittaa, että näin voidaan muodostaa vain äärellisiä yhdisteitä (äärellinen määritellään toki myöhemmin). [1]

Merkinnän avulla määritellään predikaattilogiikan kvanttorit.

**Aksiooma 3:** Olkoon  $t$  joukko. Tällöin on olemassa joukon  $t$  jäsenien alkioiden joukko, jota merkitään  $\cup t$ .

**Aksiooma 4:** Jokaisen joukon jokainen osajoukko on joukkona olemassa. Toisin sanoen, jos esimerkiksi joukot  $a, b, c$  ovat jonkun joukon alkioita, niin joukko  $\{a, b, c\}$  on olemassa.

**Aksiooma 5:** Olkoon  $A$  joukko. Tällöin on olemassa joukon  $A$  *potenssijoukko*, joka on joukon  $A$  kaikkien osajoukkojen joukko. Merkitään  $\Pi(A)$ .

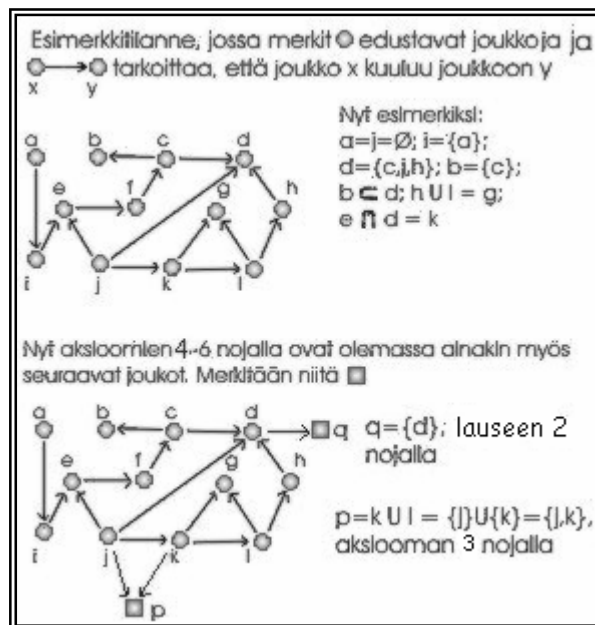
**Aksiooma 6:** Olkoon  $a$  ja  $b$  joukkoja. Tällöin on olemassa joukko, jonka alkioina ne ovat:  $\{a, b\}$ .

**Lause 2:** Jos  $a$  on joukko, niin on olemassa joukko, jonka alkiona se on:  $\{a\}$ .

**Todistus:** Aksiooman 6 ja määritelmien 1 ja 3 nojalla on olemassa joukko  $\{a, a\} = \{a\}$ .  $\square$

**Merkintä:** Jos  $a, b, c, \dots$  ovat joukon  $t$  alkioita, niin  $\cup t = a \cup b \cup c, \dots$

**Määritelmä:** Olkoon  $a$  ja  $b$  joukkoja. Niiden joukon  $a$  alkioiden joukko, jotka ovat joukon  $b$  alkioita on joukkojen  $a$  ja  $b$  *leikkaus*. Se on joukon  $a$  osajoukkona olemassa ja sitä merkitään  $a \cap b$ .



**Kuva 1**

Termit *avaruus*, *perhe* ja *kokoelma* merkitsevät kaikki samaa kuin joukko. Niillä on jokaisella oma tarkentava

merkityksensä. Kun puhutaan *avaruudesta*, tarkoitetaan, että ei tarvitse olettaa,

että se on minkään muun joukon osajoukko. Tarkasteluun riittäisi siis, että tämä *avaruus* olisi koko maailma. *Kokoelmaksi* sanotaan joukkoa, jonka alkioita ovat myös joukkoja. Termi on käytännöllinen sekaannusten välttämiseksi. *Kokoelman* alkioita kutsutaan myös jäseniksi. *Perhe* on kuin *kokoelma*, mutta usein käytetty termi on esimerkiksi *funktioperhe* (joukko, jonka alkioita ovat kuvaukset).

**Merkintä:** Osoittamalla olioita (viittaamalla olioihin) voidaan muodostaa joukko, jonka alkioina nämä oliot ovat (tässä tapauksessa on syytä olla myös varma tämän joukon olemassaolosta). Ne voidaan osoittaa luettelemalla niiden merkit/nimet seuraavasti:  $\{a, b, c, vadin\}$  tai käyttämällä muita merkintöjä, kunhan tulee selväksi mitä olioita tarkoitetaan. Yleensä:

{Ehto oliolle (esim. mihin avaruuteen se kuuluu) | Rajoitus oliolle ehdon sisällä}.

Nyt pitäisi jo määritettyjen joukko-opillisten toimintojen avulla määritellä muut laajassa käytössä olevat toimitukset, kuten komplementti ja sitten näiden avulla tärkeitä loogiset operaattorit, kuten implikaatio, ekvivalenssi, konjunktio, disjunktio jne.. Sen jälkeen voi todistukset rakentaa esim. vastaoletuksen avulla ja muutenkin käyttää kieltä vapaammin.

Esim.  $A = \{x \in B \mid x \neq a\}$  tarkoittaa, että joukon  $A$  alkioita ovat ne joukon  $B$  alkio, jotka eivät ole sama kuin  $a$ .

Tästä eteenpäin puhuessa joukosta  $A$  oletetaan, että se on avaruuden  $X$  osajoukko. Näin vältetään puhumasta *kaikesta*, joka on hyvin epämääräinen käsite.

Merkintä:  $A^c = X \setminus A$  = joukon  $A$  komplementti (avaruudessa  $X$ ) =  $\{x \in X : x \notin A\}$ .

Komplementti on niiden avaruuden  $X$  alkioiden joukko, jotka eivät kuulu joukkoon  $A$ .

[Alkuun](#)

### Propositiologiikan merkinnät ja käsitteet

Olkoon  $A$  joukko ja  $P(x) = x \in A$  lause. Nyt määritelmän 3 nojalla ilmaisut ” $P(x)$  on tosi” ja ” $P(x)$  on epätosi” voidaan korvata ilmaisuilla  $x \in A$  ja  $x \notin A$ . Olkoon joukot  $A$  ja  $B$  väitteitä  $P$  ja  $Q$  samalla tavalla vastaavat joukot. Merkitään tällöin  $x \in A \cap B = (P \wedge Q)(x)$  ja  $x \in A^c = (\neg P)(x)$ .

Siis:

$A$	--	$P$
$B$	--	$Q$
$A \cap B$	--	$P \wedge Q$
$A^c$	--	$\neg P$

Ja näiden avulla ilmaistavissa:

$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$	--	$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
$A \setminus B = (A^c \cup B)^c$	--	$P \wedge \neg Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$
$A^c \cup B$	--	$\neg P \vee Q$ Vaihtoehtoinen merkintä: $P \Rightarrow Q$

Lisäksi:  $(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$  --

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = P \Leftrightarrow Q$

Lause:  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Todistus:  $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee \neg P) \Leftrightarrow [\neg(\neg Q) \vee (\neg P)] \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ .  $\square$

Lause:  $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Todistus: Kaikki joukon  $B$  alkioit kuuluvat joukkoon  $C$ . Kaikki joukon  $A$  alkioit ovat joukon  $B$  alkioita, joten kuuluvat joukkoon  $C$ .  $\square$

Lause:  $a = b = c \Rightarrow a = c$

Todistus:  $(a \subset b \subset c) \wedge (c \subset b \subset a) \Rightarrow (a \subset c) \wedge (c \subset a) \Leftrightarrow a = c$ .  $\square$

[Alkuun](#)

### Analyysin käsitteet: karteellinen tulo ja kuvaus

Määritelmä: Olkoon joukko  $A \neq \emptyset$ .  $\forall x, y \in A : x = y \Rightarrow$  joukossa  $A$  on yksi alkio. Sanon siis, että joukossa on yksi alkio, jos sen kaikki alkioit ovat keskenään samat. Esimerkiksi joukko  $\{\emptyset\}$  on sellainen, sillä jos  $x$  ja  $y$  ovat  $\emptyset$ , niin määritelmän 2 nojalla  $x = y$ .

**Määritelmä:** Joukkojen  $a$  ja  $b$  järjestetty pari  $(a, b)$  on joukko  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ . ([1], s. 66). Aksioman 6 nojalla tämä joukko on olemassa. Sanotaan, että  $a$  ja  $b$  ovat parin  $(a, b)$  komponentteja.

**Lause 3:**  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$ .

Todistusta varten tarvitaan **lemma**:  $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \{\{c\}\} \Rightarrow a = b = c$ .

**Todistus:** Todistetaan ensin, että  $\{a\} = \{a, b\} = \{c\}$ . Väitteen mukaan ensimmäisen joukon  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$  jäsenet ovat myös joukon  $\{\{c\}\}$  jäseniä (yhtäsuuruuden määritelmä) ja tämän joukon jäseniä ovat (on)  $\{c\}$ . Näin ollen  $\{a\} = \{c\} = \{a, b\}$ . Samalla periaatteella ensimmäisestä osasta seuraa, että  $a = c$  ja että  $c = b$  ja tästä puolestaan, että  $a = b$ .  $\square$

**Lauseen 3 Todistus:** Jos  $a = b$ , niin  $(a, b) = \{\{a\}\}$ , jolloin lemmän nojalla oltava  $c = d$ , sillä muuten ei voi päteä  $(c, d) \subset (a, b)$ . Silloin  $\{\{a\}\} \subset \{\{c\}\} \Rightarrow \{a\} = \{b\} \Rightarrow a = c$ . Olkoon nyt  $a \neq b$ . Nyt lemmän mukaan myös  $c \neq d$ , koska muuten olisi  $(c, d) = \{\{c\}\}$ , jolloin  $(a, b) \subset (c, d)$  johtaa ristiriitaan. Nyt  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \{\{c\}, \{c, d\}\}$ . Nyt joko  $\{a\} = \{c\}$  tai  $\{a\} = \{c, d\}$ . Mutta jos  $\{c, d\} \subset \{a\}$ , niin  $c = d$ , mikä on ristiriita, joten  $\{a\} = \{c\} \Leftrightarrow a = c$ . Nyt, koska  $\{a, b\} \neq \{c\}$ , on oltava  $\{a, b\} = \{c, d\}$ . Koska  $a = c$  ja  $b \neq a$ , on  $b = d$ . Kääntäen: jos  $a = c$  ja  $b = d$ , niin selvästi  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ .  $\square$

Kartesisen tulon epätyhjiys sisältää tiedon siitä, että jokaisesta kerrottavasta joukosta voidaan valita ainakin yksi alkio. Tilannetta jossa tämä on mahdollonta ilman valintaaksiomaa (*the Axiom of Choice* [1]) ei teoksessani esiinny, sillä semmoinen voi ilmetä ainoastaan äärettömillä joukkojen joukoilla. Lopussa toki määrittelimme reaalityyppiset, muttemme lähde tarkastelemaan ongelmatilanteita, joissa valintaaksioma on tarpeen.

**Määritelmä:** Joukkojen  $A$  ja  $B$  karteesinen tulo  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ . On siis joukko järjestettyjä pareja, joista 'ensimmäinen' on joukon  $A$  alkio ja 'toinen' joukon  $B$  alkio.

**Lause:** Joukkojen  $A$  ja  $B$  karteesinen tulo on aina olemassa.

**Todistus:** Aksioman 6 nojalla on olemassa joukko  $\{A, B\}$ . Nyt aksioman 3 nojalla on  $\cup \{A, B\}$ . Merkitään  $\cup \{A, B\} = @$ . Selvästi, jos  $a \in A$  ja  $b \in B$ , niin  $a, b \in @$ , joten  $\{a, b\} \subset @$  ja on osajoukkona olemassa. Samoin  $\{a\} \subset @$ . Näin ollen  $\{a\}, \{a, b\} \in \Pi(@)$  kaikilla  $a \in A$  ja  $b \in B$ . Nyt jälleen  $\{a, \{a, b\}\} \in \Pi(\Pi(@))$  ja  $\{\{a, \{a, b\}\}\} \in \Pi(\Pi(\Pi(@)))$ , mistä seuraa aksioman 3 nojalla, että joukko (joka on olemassa!)  $\cup \Pi(\Pi(\Pi(@)))$  sisältää jokaisen joukon  $\{a, \{a, b\}\}$ , joten  $A \times B$  on sen osajoukko ja näin olemassa.  $\square$

**Määritelmä:** Joukkojen  $A$  ja  $B$  relaatio  $R$  on joukon  $A \times B$  osajoukko. (Järjestys tärkeä!)

**Merkintä:**  $aRb \Leftrightarrow R(a, b) \Leftrightarrow (a, b) \in R$ , kun  $R \subset A \times B$ .

**Määritelmä:** Kuvaus joukosta  $A$  joukkoon  $B$  on joukkojen  $A$  ja  $B$  sellainen relaatio  $F$ , jolle pätee:

- 1)  $\forall a \in A : \exists b \in B : aFb$
- 2)  $aFb \wedge aFc \Rightarrow b = c$ . ([6], s. 24)

Jos  $A \subset X$ , niin joukkoa  $X$  sanon *lähtöjoukoksi*, joukkoa  $A$  *määrittelyjoukoksi* ja joukkoa  $B$  *maalijoukoksi*. ( $A$  on siis aina sekä määrittely- että lähtöjoukko).

**Merkintä:**  $f : A \rightarrow B \Leftrightarrow A \xrightarrow{f} B \Leftrightarrow f$  on kuvaus joukosta  $A$  joukkoon  $B$ . Jos  $x \in A$  ja  $y \in B$ , ja  $f$  on kuvausrelaatio jossa  $xfy$ , niin merkitään  $y = f(x)$ , jolloin siis  $xf[f(x)]$ . Sanotaan, että  $f(x)$  on funktion  $f$  arvo argumentilla  $x$ . Kuvausten yhteydessä ei kannata käyttää relaatiosta merkintää  $R(x, y)$ , sillä se voi mennä sekaisin muunlaisen kuvauksen kanssa.

Määritelmä: Kuvaus (olkoon vaikka  $f : X \rightarrow Y$ ) on *surjektio*, jos sille pätee:  
 $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ . Surjektio ”täyttää” maalijoukon.

Määritelmä: Kuvaus (olkoon vaikka  $f : X \rightarrow Y$ ) on *injektio*, jos sille pätee:  
 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ . Injektio ei saa samoja arvoja eri pisteissä.

Määritelmä: Kuvaus (olkoon taas vaikka  $f : X \rightarrow Y$ ) on *bijektio*, jos se on sekä injektio, että surjektio, eli se kuuluu joukkoon  $I \cap S$ , jossa  $I$  on kaikkien injektio- ja  $S$  surjektio kuvausten joukko.

Nyt tulivat esille matematiikan tärkeimmät käsitteet – relaatio ja kuvaus. Näitä avuksi käyttäen on jo helpompi edetä.

Määritellään laskutoimitus. Kun puhutaan kuvauksesta, joka on laskutoimitus, ei merkitä tavanomaisesti lähtöjoukon jäsen sulkuihin kuvauksen merkin jälkeen, vaan kuvausmerkki laitetaan kahden lähtöjoukon komponentin väliin (lähtöjoukko kun on muotoa  $A \times A$ ).  
Esimerkiksi  $a \otimes b = c$ .

Lause 4: Jos kuvaus  $f : A \rightarrow B$  on bijektio, niin on olemassa sellainen kuvaus  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , että  $\forall x \in A : f^{-1}(f(x)) = x$ .

Todistus: Kuvauksen määritelmän kohta 1) seuraa siitä, että  $f$  on surjektio ja kohta 2) siitä, että  $f$  on injektio.  $\square$

Lause 5: Jos  $f^{-1}$  on bijektion  $f : A \rightarrow B$  käänteiskuvaus, niin se on bijektio.

Todistus: Injektio: Olkoon  $p, q \in B$  ja  $f^{-1}(p) = f^{-1}(q)$ . Koska  $f$  on surjektio, tiedetään, että on olemassa sellaiset  $x, y \in A$ , että  $f(x) = p$  ja  $f(y) = q$ . On siis  $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y))$ . Käänteisfunktion määritelmän nojalla tämän yhtälön oikea puoli on  $x$  ja vasen  $y$  ts.  $x = y$ . Surjektio: Olkoon  $x \in A$ . Tällöin  $f(x) \in B$ . Tällöin on olemassa  $f^{-1}(f(x)) \in A$  ja lisäksi  $f^{-1}(f(x)) = x$ . Näin siis jokaista  $x \in A$  kohti on olemassa joukon  $B$  alkio, joka kuvautuu käänteiskuvauksessa alkioksi  $x$ .  $\square$

Lause 6: Jos kuvaukset  $f : A \rightarrow B$  ja  $g : B \rightarrow C$  ovat bijektioita, niin niiden yhdistetty kuvaus  $g \circ f : A \rightarrow C$ , jossa  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  on myös bijektio.

Todistus: Injektio: Jos  $g(f(x)) = g(f(y))$ , niin – koska  $g$  on injektio – on  $f(x) = f(y)$  ja nyt – koska  $f$  on injektio – on  $x = y$ . Surjektio: Jokaista joukon  $C$

alkiota  $c$  kohti on kuvauksen  $g$  surjektisuuden nojalla olemassa joukon  $B$  alkio  $b$ , jolla  $g(b) = c$ . Kuvaus  $f$  on surjektio, siis alkio  $b$  kohti on olemassa joukon  $A$  alkio  $a$ , jolle  $f(a) = b$ , mistä seuraa, että  $g(f(a)) = c$ .  $\square$

Määritelmä: Olkoon  $A$  joukko. Tällöin *laskutoimitus* joukossa  $A$  on mikä tahansa kuvaus  $k : A \times A \rightarrow A$ .

Määritelmä 5: Joukko  $X$  on *äärellinen* jos ja vain jos  
 $[(A \subset X) \wedge (\text{on olemassa bijektio } A \rightarrow X)] \Rightarrow (A = X)$ .

[Alkuun](#)

## Luonnolliset luvut

Määritelmä: Joukko  $\mathbb{N}'$  on joukko, joka toteuttaa seuraavat kohdat 1) ja 2). ([1], s.22)

1)  $\emptyset \in \mathbb{N}'$

2)  $A \in \mathbb{N}' \Rightarrow A \cup \{A\} \in \mathbb{N}'$

Aksiooma 7: Joukko  $\mathbb{N}'$  on olemassa.

Olkoon  $N$  kaikkien joukkojen  $N'$  leikkaus. Voidaan nyt päätellä joitain joukon  $N$  alkioita:  
 $\emptyset \in N \Rightarrow \{\emptyset\} \in N \Rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in N \Rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in N$  jne.. Ensimmäinen kohta on kohdan 1) mukainen ja implikaatiot noudattavat kohtaa 2).

Joukkoa  $N$  sanotaan *induktiiviseksi*. *Induktiotodistukseksi* sanotaan todistusta, jossa todistetaan jokin kaikkia luonnollisia lukuja koskeva väite siten, että todistetaan ensin väite jollekin alkioille, esim. alkioille  $\emptyset$ , ja sitten todistetaan, että jos väite pätee alkioille  $k$ , niin myös alkioille  $k \cup \{k\}$ . Tällöin jos muodostetaan niiden alkioiden joukko, joille tämä väite pätee, nähdään, että se on  $N$ . Silloin *induktio-oletus* on  $P(k)$  ja induktio väite  $P(k \cup \{k\})$ , jossa  $P(x)$  on joukkoa  $x$  koskeva väite.

Lemma \*: Olkoon  $p, q \in N$ . Tällöin  $p \in q \Rightarrow p \subset q$ .

Todistus: Jos  $p = \emptyset$ , niin aina  $p \subset q$ . Induktio-oletus: pätee, kun  $p = k$ ; induktioväite: pätee, kun  $p = k \cup \{k\}$ . Oletetaan siis, että  $k \cup \{k\} \in q$ . Tämä tarkoittaa, että  $k \in q$ , eli ainakin  $k \subset q$ . Mutta, kun myös  $k \in q$  eli  $\{k\} \subset q$ , niin saadaan, että myös  $k \cup \{k\} \subset q$ .  $\square$

Lause 7: Joukko  $N$  ei ole äärellinen.

Todistus: Olkoon  $W = N \setminus \{\emptyset\}$ . Nyt  $W \subset N$ , mutta  $W \neq N$ , koska  $N \not\subset W$ . Olkoon kuvaus  $s: N \rightarrow W$  sellainen, että  $s(j) = j \cup \{j\}$ . Koska  $j \in N$ , myös  $s(j) \in N$ . Lisäksi  $j \in s(j) \Rightarrow s(j) \neq \emptyset$ , joten  $s(j) \in W$ . Kuvaus on injektio:  $s(j) = s(k) \Rightarrow j \cup \{j\} = k \cup \{k\}$ . Oletetaan, että nyt  $k \not\subset j$ , jolloin lemmän \* mukaan  $k \notin j$  ja siis  $\{k\} \not\subset j$ . Jos tällöin  $k \cup \{k\} \subset j \cup \{j\}$ , niin on oltava  $\{k\} \subset \{j\} \Rightarrow k = j \Rightarrow k \subset j$ , mikä on ristiriita. Samoin oletamalla, että  $j \not\subset k$ , saadaan ristiriita, siis  $j = k$ . Surjektio: Kun  $s(j) = \{\emptyset\}$ , niin  $j = \emptyset$ . Todistetaan nyt, että jos on olemassa  $j \in N$  siten, että  $s(j) = t$ , niin on olemassa  $j' \in N$  siten, että  $s(j') = t \cup \{t\}$ . Valitaan  $j' = j \cup \{j\} = s(j)$ . Nyt  $s(j') = s(s(j)) = s(t) = t \cup \{t\}$ .  $\square$

Asetetaan nyt joukon  $N$  alkiolle merkit (symbolit) bijektion  $\# : \mathbb{N} \rightarrow N$  avulla, siten, että joukkoon  $\mathbb{N}$  tuodaan merkit sen mukaan, kun niitä tarvitaan kuvaamaan jokin joukon  $N$  alkio, jotta  $\#$  olisi varmasti bijektio:

#0	=	$\emptyset$
#1	=	$\{\emptyset\}$
#2	=	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
#3	=	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
#4	=	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

jne..

Tässä oletetaan, että numeromerkit ovat ennestään tuttuja, ettei tarvitse määritellä niiden merkintää tämän täsmällisemmin. Kuvaus  $\# : \mathbb{N} \rightarrow N$  antaa siis joukon  $\mathbb{N}$  symboleille ”merkityksen”. Joukkoa  $\mathbb{N}$  kutsutaan *luonnollisten lukujen joukoksi* ja jokaista tämän joukon alkioita *luonnolliseksi luvuksi*.

[Alkuun](#)

## Järjestysrelaatio

Lause 8: Jos  $n, m \in N$  niin joko  $n \subset m$ ,  $n \supset m$  tai molemmat, jolloin  $n = m$ .

Todistus: Olkoon  $n \in N$  ja joukko  $S_n$  sellainen joukon  $N$  osajoukko, jolle pätevät seuraavat ehdot (1) ja (2).

- (1)  $n \in S_n$
- (2)  $k \in S_n \Rightarrow k \cup \{k\} \in S_n$

Se että tämä voi olla (ja myös on) joukon  $N$  osajoukko seuraa joukon  $N$  määritelmästä. Nyt, koska aina  $\emptyset \subset \emptyset \cup \{\emptyset\}$ , niin kaikilla  $m \in S_n : n \subset m$ .

Lauseen 8 todistus on pitkä, mutta tärkeä. Siinä todistetaan, että luonnollisissa luvuissa on luonnollinen järjestys.

**Lemma:**  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (C \cap A)$ .  
**Selitys:** Vasemmanpuoleiseen joukkoon kuuluvat ne joukon  $A$  alkio, jotka eivät ole joukon  $B$  pois  $C$  alkioita. Joukon  $C$  alkioita ei siis "oteta" pois. Näin jos ensin otetaan joukon  $B$  alkio pois, niin kuin oikealla, täytyy joukkoon  $A$  kuuluvat joukon  $C$  alkio "palauttaa".

**Lemma:**  $\mathbb{N} \setminus S_n = n$ .  
**Todistus:** Jos  $n = \emptyset$ , niin asia on selviö. Silloin nimittäin  $S_n = \mathbb{N}$ , jolloin  $\mathbb{N} \setminus S_n = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset = n$ . Induktio-oletus: pätee, kun  $n = k$ ; induktiöväite: pätee, kun  $n = k \cup \{k\}$ . Merkitään  $k' = k \cup \{k\}$ . Tiedetään, että joukkoon  $S_k$  kuuluu  $k'$ , mutta joukkoon  $S_{k'}$  ei kuulu  $k$ . Näin saadaan (näiden joukkojen määritelmää käyttämällä):

$$S_{k'} = S_k \setminus \{k\}. \text{ Siis } \mathbb{N} \setminus S_{k'} = \mathbb{N} \setminus (S_k \setminus \{k\}) = (\mathbb{N} \setminus S_k) \cup \{k\} = k \cup \{k\}. \square$$

Olkoon nyt  $n, m \in \mathbb{N}$ . Nyt aksiooman 2 nojalla,  $m$  joko on joukossa  $S_n$  tai ei. Jos se on siinä, niin yllä todetun mukaan  $n \subset m$ . Tarkastellaan nyt joukon  $\mathbb{N}$  alkioita  $m \cup \{m\}$ . Se myös joko kuuluu joukkoon  $S_n$  tai ei. Jälkimmäisessä tapauksessa se kuuluu joukkoon  $\mathbb{N} \setminus S_n$  eli joukkoon  $n$ , jolloin se on myös sen osajoukko.  $\square$

**Merkintä:** Olkoon  $n, m \in \mathbb{N}$ . Tällöin jos  $\#n \subset \#m$ , niin merkitään  $n \leq m$ . Määritelmästä 3 seuraa, että  $(n \leq m) \wedge (n \geq m) \Rightarrow n = m$ . Sanotaan, että  $n$  on pienempi tai yhtä suuri kuin  $m$  jos  $n \leq m$ .

[Alkuun](#)

**Lukumäärä**

**Määritelmä:** Olkoon  $A$  joukko. Jos on olemassa bijektio  $b: A \rightarrow \#n$ , jossa  $n \in \mathbb{N}$ , niin sanotaan, että joukossa  $A$  on  $n$  alkioita. Esimerkiksi jos  $A = \{\Omega, \Gamma, \Phi, \mathbb{H}\}$ , niin joukossa  $A$  on 4 alkioita, sillä esimerkiksi kuvaus  $b: A \rightarrow \#4$ , jolle

$$\begin{aligned} b(\Omega) &= \emptyset \\ b(\Phi) &= \{\emptyset\} \\ b(\Gamma) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ b(\mathbb{H}) &= \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

on bijektio.

**Lemma 0:** Aina on olemassa bijektio joukosta itseensä.  
**Todistus:** Yksinkertaisin esimerkki on identtinen kuvaus  $id: A \rightarrow A$ , joka määritellään siten, että  $\forall a \in A: id(a) = a$ . Injektio:  $id(x) = id(y)$ , määritelmästä seuraa, että  $x = y$ . Surjektio, koska jokaista oliota  $x$  kohti on olemassa olio  $x$  (se itse!), jolla  $id(x) = x$ .  $\square$

**Määritelmä:** Olkoon  $f: X \rightarrow Y$  kuvaus ja  $A \subset X$  osajoukko. Joukkoa  $\{y \in Y: y = f(x), x \in A\}$  merkitään  $fB$  ja sanotaan joukon  $A$  kuvaksi.

**Lemma 1:** Jos ovat olemassa bijektiot  $a: A \rightarrow B$  ja  $b: A \rightarrow C$ , niin on olemassa bijektio  $c: B \rightarrow C$ .

**Todistus:** Lauseiden 4 ja 5 nojalla on olemassa kuvauksen  $a$  bijektiivinen käänteiskuvaus  $a^{-1}: B \rightarrow A$ . Nyt lauseen 6 nojalla yhdistetty kuvaus  $b \circ a^{-1}: B \rightarrow C$  on bijektio.  $\square$

Siis jokaiselle lukuparille  $(m, n)$  joko  $m < n$ ,  $n < m$ , tai  $m = n$ . Ilman tätä tulosta olisi kovin hankala edetä.

Yllättävän vaikeaa oli todistaa tämä, että joukossa ei voi olla yhtä aikaa eri määrä jäseniä. Tämän todistettua siis tiedetään, mitä tarkoitetaan, kun sanotaan "minulla on niin ja niin monta omenaa", jossa "niin ja niin monta" on joku luku.

**Lemma 2:** Olkoon  $n \in \mathbb{N}$ . Tällöin jos kuvaus  $k: \#n \rightarrow \#n$  on injektio, niin se on myös surjektio ja siis bijektio.

**Todistus:** Tapaus  $n = 1$  on selviö. Induktio-oletus: lemma pätee luvulle  $n$ ; induktioväite: se pätee luvulle  $n \cup \{n\}$ . Olkoon kuvaus  $k: \#n \cup \{\#n\} \rightarrow \#n \cup \{\#n\}$  injektio. Koska mikään kuvaus  $k$  ei saa arvoa  $k(\{\#n\})$  millään muulla argumentilla, kuvaus  $k': \#n \rightarrow \#n \cup \{\#n\} \setminus \{k(\{\#n\})\}$ , jossa  $k'$  on sama kuin  $k$  rajoitetulla määrittelyjoukolla, on injektio. Rakennetaan kuvaus  $t: \#n \cup \{\#n\} \setminus \{k(\{\#n\})\} \rightarrow \#n$  siten, että jos  $\{ \#n \} = k(\{\#n\})$ , niin  $t(a) = a$  kaikilla joukon  $\#n$  alkioilla  $a$ . Jos  $\{ \#n \} \neq k(\{\#n\})$ , niin

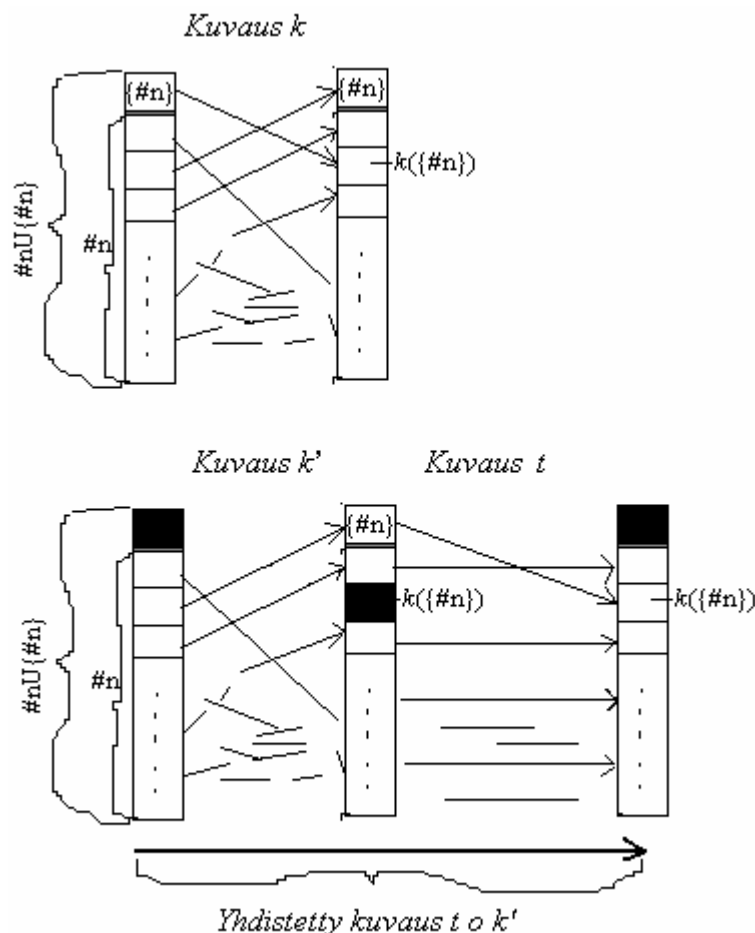
$$t(a) = \begin{cases} a, & \text{jos } a \neq \{ \#n \} \\ k(\{\#n\}), & \text{jos } a = \{ \#n \} \end{cases}$$

Kuvaus  $t$  on selvästi bijektio ja kuvaus  $t \circ k': \#n \rightarrow \#n$  on injektioiden yhdisteenä injektio (ks. lauseen 6 todistus). Nyt jos oletus pätee ja  $t \circ k'$  on surjektio, niin

$t^{-1} \circ t \circ k' = k': \#n \rightarrow \#n \cup \{\#n\} \setminus \{k(\{\#n\})\}$  on surjektioiden yhdisteenä surjektio (ks. taas lauseen 6 todistus). Olkoon nyt  $u: \#n \cup \{\#n\} \rightarrow \#n \cup \{\#n\}$  sellainen, että

$$u(a) = \begin{cases} k(\{\#n\}), & \text{kun } a = \{ \#n \} \\ k'(a), & \text{kun } a \neq \{ \#n \} \end{cases}$$

Mitään ei ole muutettu, paitsi lisättiin yksi alkio ja sille sitä vastaava kuva (molemmat ovat joukoissaan "uusia"). Kuvaus  $u$  on siis samalla tavalla surjektio. Lisäksi  $u = k$ . Siis  $k$  on surjektio. (Ajatuksen kulkua ehkä hieman selkeyttää kuva 2.)  $\square$



Kuva 2

**Lemma 3:** Olkoon  $n, m \in \mathbb{N}$ . Nyt joukkojen  $\#n$  ja  $\#m$  välissä on olemassa bijektio jos ja vain jos  $n = m$ .

**Todistus:** ” $\Leftarrow$ ” Jos  $\#n = \#m$ , niin lemmän 0 mukaan on olemassa bijektio.

” $\Rightarrow$ ” Lauseen 8 nojalla voidaan olettaa, että  $\#n \subset \#m$ ,  $\#n \neq \#m$ . Oletetaan, että on olemassa bijektio  $b: \#n \rightarrow \#m$ . Nyt  $\#m \setminus \#n \neq \emptyset$ . Olkoon  $t: \#m \rightarrow \#m$  sellainen kuvaus, että  $t(b(a)) = a$ . Koska  $b$  on surjektio, äskeinen määritelmä kattaa kaikki määrittelyjoukon  $\#m$  alkioita. Kuvaus  $t$  on injektio: oletetaan  $t(x) = t(y)$ . Nyt kuvauksen  $b$  surjektiivisuuden vuoksi on olemassa  $u, v \in \#n$ , joilla  $x = b(u)$  ja  $y = b(v)$ . Saadaan  $t(b(u)) = t(b(v)) \Rightarrow u = v \Rightarrow b(u) = b(v) \Rightarrow x = y$ . Kuvaus  $t$  on myös lemmän 2 nojalla surjektio. Kuvaus  $t$  on siis bijektio, jolloin yhdistetty kuvaus  $t \circ b: \#n \rightarrow \#m$  on sellainen bijektio, jolla  $t \circ b(a) = a \in \#n$ . Nyt jos  $q \in \#m \setminus \#n$ , niin surjektiivisuuden mukaan pitäisi olla olemassa  $p \in \#n$ , jolla  $t \circ b(p) = q$ . Tämä on aksiooman 2 kanssa ristiriidassa, sillä nyt saadaan sekä  $p = q$  että  $p \in \#n$  ja  $q \notin \#n$ .  $\square$

**Lause:** Jos  $n, m \in \mathbb{N}$  ja  $n \neq m$ , niin ei ole olemassa joukkoa, jossa on sekä täsmälleen  $n$  alkioita että täsmälleen  $m$  alkioita.

**Todistus:** Olkoon  $A$  joukko, jossa on  $n$  alkioita. Tiedetään, että on olemassa bijektio  $b: A \rightarrow \#n$ . Jos nyt joukossa onkin  $m$  alkioita, niin on olemassa bijektio  $c: A \rightarrow \#m$ . Nyt lemmän 1 nojalla on olemassa bijektio  $d: \#n \rightarrow \#m$ , mistä lemmän 3 avulla saadaan, että  $m = n$ .  $\square$

**Lause:** Olkoon  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ . Jos on olemassa bijektiot  $p: c \setminus a \rightarrow b$  ja  $q: d \setminus a \rightarrow b$ , niin  $c = d$ .

**Todistus:** Lemmaa 1 ja käänteiskuvauksen olemassaoloa soveltaen näemme, että on olemassa bijektio  $k: c \setminus a \rightarrow d \setminus a$ . Olkoon  $r: c \rightarrow d$  seuraavanlainen kuvaus:

$$r(x) = \begin{cases} k(x), & \text{jos } x \in c \text{ pois } a \\ x, & \text{jos } x \in a \end{cases}$$

Kuvaus  $r$  on nyt selvästi bijektio, mistä lemmän 3 avulla seuraa, että  $c = d$ .  $\square$

[Alkuun](#)

## Yhteenlasku

**Lause 9:** Kaikilla  $a, b \in \mathbb{N}$  on olemassa sellainen  $c \in \mathbb{N}$ , että on olemassa bijektio  $q: c \setminus a \rightarrow b$ .

**Todistus:** Olkoon  $a$  kiinteä. Nyt jos  $b = \emptyset$ , niin  $c = a$  toteuttaa ehdon. Induktio-oletus: on olemassa  $c'$  siten, että on olemassa bijektio  $c' \setminus a \rightarrow n$ ; induktioväite: on olemassa  $c'$  siten, että on olemassa bijektio  $c' \setminus a \rightarrow n \cup \{n\}$ . Nyt jos  $b = n \cup \{n\}$ , valitaan  $c = c' \cup \{c'\}$ . Nyt on olemassa bijektio  $(c' \cup \{c'\}) \setminus a \rightarrow n \cup \{n\}$ . Lisäksi  $(c' \cup \{c'\}) \setminus a = (c' \setminus a) \cup \{c'\}$ , koska  $c' \notin a$ , mikä puolestaan johtuu siitä, että  $n$  on epätyhjä ja siis  $c' \setminus a$  on epätyhjä ja näin ollen  $a \leq c'$ .  $\square$

**Määritelmä:** Kuvaus  $+$ :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  on sellainen, että  $a + \emptyset = a$  ja  $a + b = c$  jos ja vain jos joukossa  $c \setminus a$  on  $b$  jäsentä, kun  $a$  ja  $b$  ovat epätyhjiä. On siis olemassa bijektio  $k: c \setminus a \rightarrow b$ .

**Lemma 4:** Olkoon  $a, b \in \mathbb{N}$  ja  $a \subset b$ . Nyt  $(b \setminus a) \cup a = b$ .

**Todistus:** Liitteessä olevan lemmän mukaan  $(b \setminus a) \cup a = (b \setminus a) \cup (a \cap b) = b \setminus (a \cup a) = b \setminus \emptyset = b$ . Ensimmäinen yhtäsuuruus pätee, koska  $a \subset b$ .

**Lause:**  $a + b = b + a$ .

**Todistus:** Olkoon  $a + b = c$  ja  $b + a = d$ . Nyt ovat olemassa bijektiot  $p: c \setminus a \rightarrow b$  ja  $q: d \setminus b \rightarrow a$ . Koska on olemassa bijektio  $i: a \rightarrow a$  ja kuvauksen  $p$  lähtöjoukko ei sisällä  $a$ :n alkioita, niin voidaan rakentaa uusi bijektio  $t: (c \setminus a) \cup a \rightarrow b \cup a$ , mikä on lemmän 4 nojalla sama kuin  $t: c \rightarrow b \cup a$ . Samalla tavalla voidaan rakentaa bijektio  $s: d \rightarrow a \cup b$ . Koska  $a \cup b = b \cup a$ ,

voidaan lauseiden 4, 5 ja lemmän 1 avulla nähdään, että on olemassa bijektio  $c \rightarrow d$ , josta lemmän 3 nojalla seuraa, että  $c = d$ .  $\square$

Määritelmä: Olkoon laskutoimitus  $+$ :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sellainen, että  $a + b = c$  jos ja vain jos  $\#a + \#b = \#c$ .

Määritelmä: Olkoon laskutoimitus  $\cdot$ :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sellainen, että  $0 \cdot n = 0$  ja  $(k+1) \cdot n = (k \cdot n) + n$  kaikilla  $n, k \in \mathbb{N}$ . Merkitään lyhyemmin:  $a \cdot b = ab$ . Kutsutaan tätä kertolaskuksi.

[Alkuun](#)

## Kokonaisluvut

Määritelmä: Jos joukon  $A$  relaatio  $R$  itseensä (eli joukon  $A \times A$  osajoukko) toteuttaa seuraavat ehdot 1), 2) ja 3), niin se on *ekvivalenssirelaatio* joukossa  $A$ . [5]

- |   |                   |
|---|-------------------|
| 1) $\forall x \in A : xRx$ .                                  | (refleksiivisyys) |
| 2) $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$                 | (symmetrisyys)    |
| 3) $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ | (transitiivisyys) |

Huomautus: Kohtaa 1) ei voi johtaa kohdista 2) ja 3) (vaikka niin kuvittelin), koska näiden kahden kanssa sopuinnussa on tilanne, jossa  $\exists x \in A : \forall y \in A : (x, y) \notin R$ .

Määritelmä: Olkoon  $R$  ekvivalenssirelaatio joukossa  $X$  ja  $a \in X$ . Tällöin joukko  $\{x \in A : aRx\}$  on *ekvivalenssiluokka*, jota merkitään  $\bar{x}$ .

Huomautus: Ekvivalenssiluokka ei ole koskaan  $\emptyset$ , koska kohdan 1) mukaan aina  $x \in \bar{x}$ .

Lause 10: Jos  $R$  on ekvivalenssirelaatio ja  $xRy$ , niin  $\bar{x} = \bar{y}$ .

Todistus: Nyt  $\bar{x} = \{a : xRa\}$  ja  $\bar{y} = \{a : yRa\}$ . Nyt jos  $w \in \bar{x}$ , niin  $xRw$ . Tiedetään lisäksi, että  $xRy$ . Koska relaatio on symmetrinen, myös  $yRx$  ja koska transitiivinen, niin  $(yRx \wedge xRw) \Rightarrow yRw$ , mikä tarkoittaa, että  $w \in \bar{y}$ . Siis  $\bar{x} \subset \bar{y}$ . Vastaavalla päättelyllä saadaan, että  $\bar{y} \subset \bar{x}$ , siis  $\bar{x} = \bar{y}$ .  $\square$

Korollari 1: Jos  $a \in \bar{x}$ , niin  $\bar{a} = \bar{x}$ .

Todistus: Koska  $a \in \bar{x}$ , on  $xRa$ . Nyt lauseen 10 mukaan  $\bar{a} = \bar{x}$ .

Lause 11: Jos  $A$  ja  $B$  ovat joukon  $X$  ekvivalenssiluokkia, niin joko  $A \cap B = \emptyset$  tai  $A = B$ .

Todistus: Kuvitellaan, että  $A \cap B \neq \emptyset$  ts.  $\exists x \in A : x \in B$ . Korollarin 1 mukaan  $\bar{x} = A$  ja  $\bar{x} = B$ , joten  $A = B$ .  $\square$

Lause: Olkoon  $a, b, x \in \mathbb{N}$ . Tällöin  $a + x = b + x \Leftrightarrow a = b$ .

Todistus: Lauseen 7 todistuksessa todistetaan, että  $a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$ . Tästä induktiolla on helppo todistaa väite.  $\square$

Lause 12: Jos  $a, c \in \mathbb{N}$  ja  $a \leq c$ , niin on olemassa sellainen  $b \in \mathbb{N}$ , että  $a + b = c$ .

Todistus: Jos  $c = a$ , niin  $b = 0$ . Induktio-oletus: on olemassa sellainen  $b$ , että on olemassa bijektio  $k: c \setminus a \rightarrow b$ ; induktioväite: on olemassa sellainen  $b'$ , että on olemassa bijektio  $k': c \cup \{c\} \setminus a \rightarrow b'$ . Valitaan  $b' = b \cup \{b\}$  ja asetetaan

$$k'(x) = \begin{cases} k(x), & \text{kun } x \in c \\ b, & \text{kun } x = c \end{cases}$$

Kuvaus  $k'$  on bijektio, koska se muodostui bijektiosta, jonka lähtöjoukkoon lisättiin yksi "uusi" jäsen ja sille sitä vastaava "uusi" kuva maalijoukkoon. Nimittäin  $c \notin c$  ja  $b \notin b$  kaikilla  $b, c \in \mathbb{N}$ . Tämän todistaa helposti induktiolla.  $\square$

**Määritelmä:** Olkoon  $R$  ekvivalenssirelaatio joukossa  $A$ . Tällöin joukkoa

$$\{ E \subset A : E \text{ on ekvivalenssiluokka} \}$$

merkitään  $A/R$ . Se on siis joukko, jonka alkiot ovat kaikki joukon  $A$  sellaiset osajoukot, jotka ovat relaatiossa  $R$  joukon  $A$  ekvivalenssiluokkia.

Käsitellään joukkoa  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ . Olkoon siinä laskutoimitus  $+$ :  $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ , jota merkitään siis samalla tavalla kuin joukon  $\mathbb{N}$  laskutoimitusta  $+$  ja määritellään se seuraavasti: jos  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$ , niin  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ .

Intuitiivisesti, alasteen laskusäännöillä tämä ekvivalenssirelaatio samastaa kaikki lukuparit, joiden erotus on sama. Täytyy kuitenkin edetä näin, koska erotusta eikä negatiivisia lukuja vielä ole. Ideana on siis määritellä negatiiviset luvut pareina  $(a, b) = a - b$ , mutta joudutaan tietenkin samastamaan ekvivalenssirelaatiolla kyseiset parit.

Muodostetaan nyt joukkoon  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$  relaatio  $\sim \subset \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 = \mathbb{N}^4$  siten, että  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$ . Tämä on ekvivalenssirelaatio, koska:

- (1)  $a + b = a + b \Leftrightarrow (a, b) \sim (a, b)$
- (2)  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b \Leftrightarrow c + b = a + d \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$
- (3)  $[(a, b) \sim (c, d)] \wedge [(c, d) \sim (e, f)] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + d = c + b \\ c + f = e + d \end{cases} \Leftrightarrow a + d + c + f = c + b + e + d \Leftrightarrow a + f = e + b \Leftrightarrow (a, b) \sim (e, f)$$

Määritellään joukkoon  $\mathbb{N}^2/\sim$  laskutoimitus, jota merkitään myös merkillä  $+$  seuraavasti:  $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a, b) + (c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$ . Merkitään tätä joukkoa  $\mathbb{N}^2/\sim = \mathbb{Z}$  (kokonaislukujen joukko). Otetaan lisäksi käyttöön tutummat merkinnät joukon  $\mathbb{Z}$  alkioille:  $\overline{(x, y)} = x - y$ . Nyt esimerkiksi voidaan todeta, että  $x - x = 0$ , koska  $\overline{(x, x)} = \overline{(0, 0)}$ , sillä  $x + 0 = 0 + x$ .

**Määritelmä:** Olkoon laskutoimitus  $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  sellainen, että  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, bc + ad)$ . Tämä on kertolasku joukossa  $\mathbb{Z}$ . Merkitään samaan tapaan kuin luonnollisten lukujen kertolasku – ilman välimerkkiä.

**Lause:**  $x - y \in \mathbb{Z}$  kohti on olemassa  $a \in \mathbb{N}$ , jolla joko  $a - 0 = x - y$  tai  $0 - a = x - y$ .

**Todistus:** Lauseen 12 nojalla jokaista paria  $x, y \in \mathbb{N}$ , jossa  $x \leq y$  kohti on olemassa  $a \in \mathbb{N}$ , jolla  $x + a = y = y + 0 \Rightarrow x + a = 0 + y \Leftrightarrow (x, y) \sim (0, a)$  ja jos  $x \leq y$ , niin vastaavasti  $(x, y) \sim (a, 0)$ .  $\square$

Näin siis jokainen kokonaislukujen alkio on muotoa  $a - 0$  tai  $0 - a$ , jossa  $a \in \mathbb{N}$  jota voidaan lyhyemmin merkitä:  $a$  ja  $(-a)$ .

Kertolaskusta voidaan helposti todeta:  $a(-1) = (a, 0)(0, 1) = (0, -a) = -a$  ja muita tämän laskutoimituksen hyödyllisiä ominaisuuksia. Lisäksi  $-(-a) = a$ .

Olkoon nyt  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  sellainen, että  $h(x) = x$ . Kuvauksen  $h$  on injektio:  $h(x-0) = h(y-0) \Rightarrow x = y$ ; surjektio: jokaista  $x \in \mathbb{N}$  kohti on olemassa  $(x, 0) = (x-0) = x$  joukon määritelmän nojalla.

Nyt  $h(a+b) = h(a) + h(b)$ , koska  $h(\overline{(x,0)}, \overline{(y,0)}) = h(\overline{(x+y,0)}) = h(x+y-0) = x+y = h(x-0) + h(y-0) = h(\overline{(x,0)}) + h(\overline{(y,0)})$ . Sama pätee kertolaskulle:  $h((a,b)(c,d)) = h((ac+bd, bc+ad)) = h(\overline{(ac, bc)} + \overline{(bd, ad)}) = h(\overline{(ac+bd, bc+ad)}) = (a,b)(c,d) = h(a,b)h(c,d)$ . Määritellään nyt joukko  $\mathbb{N}$  uudestaan, niin, että edellisen joukon  $\mathbb{N}$  alkioita  $x$  aina vastaa alkio  $x$  joukossa  $\mathbb{Z}$ . Syy uuteen määrittelyyn on se, että halutaan olevan:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Laskutoimitukset näin yhdistyvät ja niiden ominaisuudet säilyvät.

[Alkuun](#)

## Rationaaliluvut lyhyesti

Samalla tavalla kuin äsken laajennettiin luonnollisten lukujen joukko kokonaislukujen joukoksi, voidaan laajentaa kokonaislukujen joukko rationaaliluvuiksi. Relaatiossa  $\sim \subset \mathbb{N}^4$  sijasta käytetään relaatiota  $\approx \subset \mathbb{Z}^4$ , joka määritellään seuraavasti [5]:  $(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow ad = cb$  ja  $b \neq 0 \neq d$ . Periaate on sama. Intuitiivisesti ajatellen samaistettiin kaikki sellaiset lukuparit, joiden osamäärä on sama. Nyt  $\mathbb{Q}$  on kokonaislukuparien joukko, jossa ovat samaistettu semmoiset parit, joiden osamäärä on sama. Pareja merkitään  $a/b$ .

Määritellään vielä joukkoon  $\mathbb{Q}$  yhteenlasku ja kertolasku seuraavasti:  $a/b + c/d = (ad + bc)/db$  ja  $(a/b)(c/d) = ac/bd$ .

Voidaan nyt samalla tavalla kuin äskeisessä tapauksessa määrittellä kokonaisluvut uudestaan kuvauksella (bijektio)  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} : a/1 \rightarrow a$ . Tässäkin voidaan osoittaa laskutoimitusten ominaisuuksien säilyvän.

Saatiin  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

Mitään erotusta tai osamäärää ei siis tässä mallissa ole. On vain lukujen ja vastalukujen summia sekä lukujen ja sen käänteislukujen tulo. Luvun  $a$  vastaluku on  $(-a)$  ja käänteisluku on  $1/a$ .

Lause 13: Jos  $q \in \mathbb{Q}$ , niin  $q = n + a/b$ , jossa  $n, a, b \in \mathbb{N}$  ja  $a \leq b$ .

Todistus:  $q = e/f$ . Jos  $e \leq f$ , niin asia on selvä. Jos  $f \leq e$ , niin lauseen 12 nojalla on olemassa  $a$ , jolla  $f + a = e$ , jolloin  $e/f = (f+a)/f = f/f + a/f = 1 + a/f$ . Toiseksi viimeinen yhtäsuuruus seuraa yhteenlaskun määritelmästä ja viimeinen rationaalilukujen relaatiosta. Tiedetään, että  $a \leq e$ , sillä  $f \neq 0$ . Jos ei vielä  $f \leq a$ . Toistetaan uudestaan. Toistoja tulee tehdä enintään  $e - f$ , sillä  $a$  pienenee joka kerta vähintään yhdellä.

Merkintä  $q^{-1}$  ei kuulu exp-kuvaukseen, vaan merkitsee yksinään luvun  $q$  käänteisalkiota.

Määritelmä: Olkoon kuvaus  $\exp : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  sellainen, että kun  $q \in \mathbb{Q}$  ja  $n \in \mathbb{N}$ , niin  $\exp(q, n) = q^n$ , kun  $n = 0$  ja  $\exp(q, n) = \exp(q, k) \cdot q$ , kun  $n = k + 1$ . Merkitään:  $\exp(q, w) = q^w$ . Esimerkiksi  $10^n = 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10$ , jossa on  $n$  kpl lukuja 10 kerrottu keskenään. Lisäksi  $q^{-1} = 1/q$  ja  $q^{-n} = (q^{-1})^n = (1/q) \cdot \dots \cdot (1/q)$ . Otetaan myös käyttöön summamerkintä:  $\sum_{k=m}^n a(k) = a(m) + \dots + a(n); m \leq n$ .

[Alkuun](#)

## Reaaliluvut

Tähän mennessä olen jo määritellyt suurimman osan välttämättömistä tuloksia. Tässä luvussa esittelen reaalityyppien konstruoinnin pääidean – yksityiskohtainen tarkastelu meni yli työn tarkoituksenmukaisia rajoja.

Muodostetaan ensin kaikkien semmoisten lukujonojen joukko, jonka termit ovat yksinumeroisia lukuja ja kaikki semmoiset, joissa jossain vaiheessa alkaa jakso ja samaistetaan se rationaalilukujen kanssa.

Olkoon  $T$  kaikkien kuvausten  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 8, 9\}$  joukko. Se on olemassa olevan joukon  $\Pi(\mathbb{N}^2)$  osajoukkona olemassa. Sanotaan joukkoa  $T$  *avoimen yksikkövälin reaalityyppiksi* ja merkitään lukua  $t$  seuraavasti:  $0, t(0)t(1)\dots t(n)\dots$ . Olkoon joukko

$$K = \{t \in T \mid \exists n, p \in \mathbb{N} : t(m+p) = t(m) \text{ kaikilla } m \geq n\}.$$

Olkoon kuvaus  $k: K \rightarrow \mathbb{Q}$  sellainen, että

$$k(t) = \frac{1}{10^n} \left[ \sum_{k=0}^n 10^{n-k} t(k) + \frac{1}{10^p - 1} \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} 10^{n+p-k} t(k) \right) \right],$$

jossa  $n$  ja  $p$  ovat joukon  $K$  määritelmän lukuja.

Tämä on rationaalilukujen laskutoimituksin rationaaliluvuista saatu luku eli rationaaliluku. Kaava perustuu intuitiivisesti seuraavaan. Ajatellaan tuttuja yksikkövälin rationaalilukuja: Olkoon  $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} a_{n+1} a_{n+2} \dots$ . Kaavan plusmerkin oikealla puolella oleva termi on  $a_1 a_2 \dots a_n$ . Plusmerkin vasemmalla puolella on  $0, a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} a_{n+1} \dots$ , sillä tavalla, että  $(10^p - 1) 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} a_{n+1} \dots = 10^p \cdot 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} a_{n+1} \dots - 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} a_{n+1} \dots = a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} \Leftrightarrow 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} a_{n+1} \dots = a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p} / (10^p - 1)$ .

Kääntäen – kuvaus rationaaliluvuista reaalityyppiin onnistuu tutun jakokulmaperiaatteen avulla: Olkoon  $a, b \in \mathbb{N}$ , joilla  $a \leq b$ . Etsitään nyt sellainen reaalityyppi  $r$ , jolla  $k(r) = a/b$ . Merkitään  $(x \text{ div } y)$  suurinta luonnollista lukua  $n$ , jolla  $yn \leq x$  sekä  $(x \bmod y) = x - y(x \text{ div } y) =$  jakojäännös. Määritellään tällöin kuvaus  $j: \mathbb{Q} \rightarrow K$  kaavalla  $j(a/b)(n) = (((10^n a) \text{ div } b) \bmod 10)$ . Nyt voidaan osoittaa ensin, että  $j(a/b) \in K$  ja sitten, että  $k(j(a/b)) = a/b$ . Nämä todistukset vaativat lukuteoreettisia tuloksia (jotka on kyllä mahdollista johtaa tiedoilamme) ja tämän työn puitteissa ei ole käytännöllistä esittää niitä todistuksia. Näin kuitenkin saadaan siis kaikki rationaaliluvut  $a/b$ , joissa  $a \leq b$ , ilmaistettuna reaalityyppinä. Kuvausta  $k$  tarvitaan kuitenkin siihen, että jotkut reaalityyppit ovat samoja rationaalilukuja. Esimerkiksi  $0,100000\dots = 0,099999\dots$ .

**Määritelmä:** Olkoon joukko  $\mathbb{Z} \times T$ . Sen alkioita ovat parit muotoa  $(n, t)$ . Näitä pareja merkitään  $n, t(0)t(1)\dots t(k)\dots$ . Esim.  $3,14159265358979\dots$ . Tämä on koko reaalityyppien joukko. Edellinen oli siis tämän erikoistapaus  $(0, t)$ . Merkitään  $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \times T$ .

Reaalityyppien  $a$  ja  $b$  yhteenlasku määritellään seuraavasti:

$$1) (n, t), (m, l) \in \mathbb{R} : (n, t) + (m, l) = (n+m + ((t(0)+l(0)) \text{ div } 10), t+l), \text{ jossa}$$

$$(t+l)(n) = ((t(n)+l(n)) \bmod 10) + ((t(n+1)+l(n+1)) \text{ div } 10)$$

Huomautus: voi käydä niin, että  $t(n)+l(n) = 9$  kaikilla  $n$ , jolloin tulos on  $0,999\dots = 1$ .

Nyt saadaan kaikki rationaaliluvut  $q$  ilmaistuna reaalityyppinä, sillä jokainen rationaaliluku on lauseen 13 mukaan muotoa  $n + a/b$ , jossa  $n$  on kokonaisluku ja  $a/b$  sellainen, että  $a \leq b$ . Silloin  $j'(q) = (n, j(a/b))$ . Nyt toistetaan jo aiemmin tehdyt uudelleenmäärittelyt – määritellään  $\mathbb{Q}$

uudestaan tämän kuvauksen avulla. Ja taas laskutoimitukset täsmäävät, mutta tällä kertaa todistaminen jää tekemättä.

[Alkuun](#)

## Järjestysrelaatio

Olisi vielä mukava määritellä reaalilukuihin jokin järjestys: nyt siinä on ainoastaan luonnollisten lukujen luonnollinen järjestys, joka periaatteessa indusoi järjestyksen joukkoon  $\mathbb{Q}$ , muttei joukkoon  $\mathbb{R}$ . Määritellään relaatio kirjan [4] mukaisesti:

Olkoon  $P$  sellainen joukon  $\mathbb{R}$  osajoukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot 1) ja 2)

- 1) Täsmälleen yksi ehdoista i), ii) ja iii) pätee kaikille  $x \in \mathbb{R}$ : i)  $x \in P$  ii)  $-x \in P$  iii)  $x = 0$ .
- 2) Jos  $x, y \in P$ , niin  $xy \in P$ .

Näin voidaan kutsua joukkoa  $P$  positiivisten reaalilukujen joukoksi. Järjestys määritellään seuraavasti:  $x + (-y) \in P \Rightarrow x < y$ ,  $x + (-y) \notin P \Rightarrow y < x$ ,  $x + (-y) = 0 \Rightarrow x = y$ . Transitiiivisuus ja muut järjestyksen välttämättömät ominaisuudet voidaan tästä johtaa yhtä helpolla aritmetiikalla.

[Alkuun](#)

## Yhteenveto

Näin saatiin määriteltyä jotenkuten reaaliluvut olettamalla minimaalinen määrä olemassa olevia käsitteitä. Tämä työ antaa lähtökohtia monien matemaattisten käsitteiden johtamiseen, analysoimiseen ja todistamiseen. Valinta-aksioman avulla voidaan määritellä joukoille mahtavuudet, kuvausten avulla saadaan nopeasti määriteltyä etäisyydet ja niiden myötä mitat ja integraalit. Toisaalta voi myös jäädä abstraktisemmalle tasolle ja lähteä määrittelemään algebrallisia struktuureja: ryhmiä (joukkoja, joissa on yksi laskutoimitus), renkaita (joukkoja, joissa kaksi laskutoimitusta), kuntia jne.. ryhmä ei ole muuta kuin joukon ja kuvauksen järjestetty pari  $(J, k)$ . Toisaalta voi edetä topologian suuntaan, määrittelemällä joukon topologia (joukon osajoukkojen kokoelma, joka sisältää jäseniensä mielivaltaiset yhdisteet ja äärelliset leikkaukset) ja sen avulla mennä jatkuviin kuvauksiin, mahdollisesti metriikoihin (joukon sisäisiin etäisyyksiin), joista voidaan jo alkaa tarkastelemaan korkeamman analyysin työkaluja, kuten monistoja ja niiden differentoituvia struktuureja. Voi myöskin jatkaa reaaliluvuista, määritellä niihin etäisyydet – metriikan erikoistapaus – sen avulla avoimet joukot – topologian erikoistapaus ja näiden avulla jatkuvat kuvaukset ja päästäänkin lukiosta tuttuihin käsitteisiin.

Minulle työn tekeminen opetti aksiomien merkitystä ja tietenkin yleissivistyyn vähän matematiikassa joutuessani (saadessani?) tutustumaan lähteissä mainittuihin mahtaviin teoksiin. Ymmärsin, että matematiikassa kuitenkin joudutaan olettamaan monia asioita, ennen eteenpäin pääsemistä. Työni on sikäli suppea – se ei näytä niin hyvin, että joukot eivät varsinaisesti riitä täydelliseen käsitteistöön. Esimerkiksi joukkojen järjestyksiluokat – ordinaalit – eivät muodosta joukkoa, vaikka joku haluaisikin – niiden joukko olisi nimittäin myös ordinaali ja näin saadaan alussa mainittu Russellin paradoksi.

[Alkuun](#)

## Alkuun

### Lähteet:

Kirjaviitteet:

- [1] **Bernays, Paul;** *Axiomatic Set Theory*, North-Holland publishing company, Amsterdam 1968.
- [2] **Curry, Haskell B.;** *Foundations of Mathematical Logic*. Dover publications, INC., New York. Copyright © 1977 by Haskell B. Curry
- [3] **Gardner, Martin;** *aha! Gotcha – Paradoxes to puzzle and delight*; W. H. Freeman Company; New York; 1982.
- [4] **Serge Lang;** *Algebraic Structures*; Addison-Wesley, 1967, QA3.L2
- [5] **Metsäkylä, Tauno; Näätänen, Marjatta;** *Algebra I*, © Limes ry, 1. painos 2003.
- [6] **Väänänen, Jouko;** *Matemaattinen logiikka*; toinen pianos; Hakapaino Oy Helsinki 1988.
- [7] **Whitehead, Alfred North; Russell, Bertrand;** *Principia Mathematica*, second edition, Cambridge, at the university press 1950.
- [8] **Wittgenstein, Ludwig;** *Tractatus logico-philosophicus*.

Internetviitteet:

- [9] Tämä sivusto päivittyy päivittäin. <http://mathworld.wolfram.com/>
  - <http://mathworld.wolfram.com/Zermelo-FraenkelAxioms.html>
  - <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Zermelo.html>
  - <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Fraenkel.html>Lukemispäivämääriä: 15-28.11.2004
- [10] Päivitetty 23.11.2004 <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/>
  - <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Zermelo.html>
  - <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fraenkel.html>Lukemispäivämäärä: 27.11.2004

## Alkuun