Luku kahden alkuluvun summana

Juho Salmensuu

Lahden Lyseon lukio

Matematiikka

2008

Tiivistelmä

Tutkielmassa tarkastellaan kysymystä; kuinka monella eri tavalla annettu parillinen kokonaisluku voidaan esittää kahden alkuluvun summana. Tämä on hyvin olennainen kysymys, kun selvitetään Goldbachin konjektuurin totuutta. Goldbachin konjektuuri sanoo, että jokainen neljää suurempi parillinen kokonaisluku voidaan esittää kahden alkuluvun summana. Lisäksi tutkielmassa koetettiin ratkaista seuraavaa ongelmaa: jokainen mielivaltaisen suuri parillinen luku voidaan esittää kahden alkuluvun summana. Tutkielman tulokset rakennetaan niiden tietojen pohjalta, joita esiintyy lukion pitkässä matematiikassa ja kirjassa: Fundamentals of Number Theory [1]. Tutkielmassa löydetään kombinatoristinen formula, joka laskee kuinka monella eritavalla luku 2k voidaan esittää lukua $\sqrt{2k}$ suurempien kahden eri alkuluvun summana. Lisäksi tutkielmassa osoitetaan, että jos kaksi tutkielmassa esitettyä konjektuuria pitävät paikkaansa, niin jokainen mielivaltaisen suuri parillinen luku voidaan esittää kahden alkuluvun summana.

Sisällysluettelo

1. Johdanto

Vuonna 1742 Christian Goldbach lähetti Leonhard Eulerille yhdelle kaikkien aikojen tunnetuimmalle matemaatikolle kirjeen, joka sisälsi seuraavan väittämän:

”Jokainen viittä suurempi kokonaisluku voidaan esittää kolmen alkuluvun summana.”

Euler kiinnostui kovasti ongelmasta ja vastasi Goldbachille konjektuurilla, että jokainen kahta suurempi parillinen luku voidaan esittää kahden alkuluvun summana [2].

Tämä on yksi aikamme tunnetuimpia avoimia matematiikan ongelmia. Tietokoneiden avulla on voitu tarkistaa, että jokainen lukua 2×10^{17} pienemmistä parillisista luvuista voidaan esittää kahden alkuluvun summana [2]. Goldbachin konjektuurin sisältö on helppo ymmärtää, mutta sen todellinen sisäistäminen vie paljon aikaa. Monet matemaatikot ovat aikojen kuluessa keksineet uusia ja uusia työkaluja käydäkseen tämän hienon ongelman kimppuun, mutta se on kestänyt kaikki hyökkäykset kuin kallio. On paljon mahdollista, että me emme tule näkemään sitä päivää jolloin tämä ongelma ratkaistaan.

Ennen varsinaisen tutkielman alkua esitetään muutamia olennaisia lauseita ja määritelmiä, joita ei esiinny lukion pitkässä matematiikassa. Tutkielma alkaa seulan muodostamisella, jonka avulla saadaan selville kuinka monella eri tavalla luku 2k voidaan esittää kahden eri suuren lukua $\sqrt{2k}$ suurempien alkulukujen summana(T(2k)). Sen jälkeen muodostetaan tämän seulan pohjalta kaava, joka antaa tulokseksi T(2k):n arvon. Seuraavassa kolmessa luvussa siitä eteenpäin puretaan T(2k) osiin, joita on helpompi käsitellä. Lopuksi osoitetaan, että jos kaksi tutkielmassa esitettyä konjektuuria pitävät paikkaansa, niin jokainen mielivaltaisen suuri parillinen kokonaisluku voidaan esittää kahden alkuluvun summana.

2. Muutamia peruslauseita ja määritelmiä

Tässä luvussa esitetään muutamia yleisesti tunnettuja lauseita ja määritelmiä, jotka ovat olennaisia tutkielman tulosten todistamiseksi. Lauseet ja määritelmät on pääosin poimittu kirjasta: Fundamentals of Number Theory [1]. Myös lauseiden todistukset löytyvät kyseisestä kirjasta, enkä sen tähden esitä niitä tutkielmassa.

Määritelmä 1

Funktio f: **N** -> **R** on multiplikatiivinen, jos kaikilla syt(a, b) = 1 pätee f(a)f(b) = f(ab)

(Huom. Toimin aina kokonaislukualueessa ellen erikseen toisin mainitse.)

Määritelmä 2(iso O)

f(x) = O(g(x)), jos on olemassa vakio M, että $\frac{|f(x)|}{g(x)} < M$ kaikilla mielivaltaisen suurilla x:n arvoilla.

Määritelmä 3

Olkoon A joukko. Silloin #A on joukon A alkioiden lukumäärä.

Määritelmä 4

$[x]$ on suurin sellainen kokonaisluku, että $[x] \le x < [x]+1$, missä x on reaaliluku.

Määritelmä 5

$\omega(n)$ on positiivisen kokonaisluvun n erilaisten alkutekijöiden lukumäärä.

Määritelmä 6

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \; jos\, n = 1 \\ 0, \; jos\, n\, ei\, ole\, neliövapaa. \\ (-1)^{\omega(n)}, muuten \end{cases}$$

Luku on neliövapaa, jos sillä ei ole tekijöitä muotoa m^2. (Huom. $\mu(n)$ on multiplikatiivinen funktio.)

Lause 1

Jos funktio f on multiplikatiivinen, niin $\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p))$, missä p on alkuluku. (Huom. Kun merkitsen jotakin lukua p:llä, tarkoitan aina poikkeuksetta alkulukua.)

Lause 2(Inkluusio-Ekluusio periaate)

Olkoon S joukko, jossa on N erilaista alkiota, ja olkoon $S_1, \ldots, S_r$ mielivaltaisia S:n osajoukkoja, joissa on vastaavasti $N_1, \ldots, N_r$ alkiota. Kaikille $1 \le i < j < \ldots < l \le r$, olkoon $S_{ij\ldots l}$ joukkojen $S_i, S_j, \ldots, S_l$ leikkausjoukko. Ja olkoon $N_{ij\ldots l}$ joukon $S_{ij\ldots l}$ alkioiden lukumäärä. Silloin joukon $S - (S_1 \cup \ldots \cup S_r)$ alkioiden lukumäärä on:

$$K = N - \sum_{1 \le i \le r} N_i + \sum_{1 \le i < j \le r} N_{ij} - \sum_{1 \le i < j < k \le r} N_{ijk} + \ldots + (-1)^r N_{12\ldots r}.$$

Lause 3 (Kiinalainenjäännös lause)

Jos $n_1, n_2, ..., n_k$ ovat suhteellisia alkulukuja, suurempia kuin 1, ja $a_{1,} a_2, ..., a_k$ ovat kokonaislukuja, niin on olemassa yksikäsitteinen a mod $n_1 n_2 \cdots n_k$, että

$$\begin{gathered} a \equiv a_1 (\mathrm{mod}\, n_1) \\ a \equiv a_2 (\mathrm{mod}\, n_2) \\ \vdots \\ a \equiv a_k (\mathrm{mod}\, n_k) \end{gathered}$$

Lause 4

On olemassa vakiot c_1 ja c_2 , että

$c_1 \dfrac{x}{\ln x} < \pi(x) < c_2 \dfrac{x}{\ln x}$ kaikilla $x \geq 2$, missä $\pi(x)$ on lukua x pienempien alkulukujen lukumäärä.

3. Tulokset ja niiden todistukset

3.1 Seula

Lähdemme liikkeelle koulukurssilla opetetusta Erasthoneen seulasta ja näytämme kuinka sitä voidaan soveltaa niin, että saadaan selville, kuinka monella eri tavalla luku 2k voidaan esittää kahden alkuluvun summana. Mutta ensin muutama määritelmä:

Määritelmä 7

– P(2k) = kuinka monella eri tavalla luku 2k voidaan esittää kahden eri alkuluvun summana.

– T(2k) = kuinka monella eritavalla luku 2k voidaan esittää lukua $\sqrt{2k}$ suurempien kahden eri alkuluvun summana. (Funktio sisällyttää myös luvun 1 alkulukujen joukkoon.)

– R(2k) = $\prod_{p \leq \sqrt{2k}} p$

Määritelmä 8

M(d) = $\# \left\{ t \,\middle|\, 1 \leq t < k \wedge k^2 - t^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, d) \right\}$ (Huom. Tutkielmassa käsittelen d:tä yleensä R(2k):n tekijänä.)

Kirjoitetaan allekkain kaikki eri mahdollisuudet esittää luku kahden positiivisen kokonaisluvun summana ja sen viereen summatermien lukua $\sqrt{2k}$ pienemmät alkutekijät. (Huom. M(d) on niiden summaparien lukumäärä, että d jakaa summaparin termien tulon ja summaparin termit ovat erisuuria.)

Esim.

Tarkastellaan lukua 2k = 50.

Tekijät 25-50	Summa	Tekijät 0-25	d	M(d)
2,5	50 + 0	2,3,5,7	2	13
7	49 + 1		3	17
2,3	48 + 2	2	5	5
	<u>47 + 3</u>	3	7	8
2,	46 + 4	2	2*3	9
3,5	45 + 5	5	2*5	3
2	44 + 6	2,3	2*7	4
	<u>43 + 7</u>	7	3*5	4
2,3,7	42 + 8	2	3*7	5
	41 + 9	3	5*7	2
2,5	40 + 10	2,5	2*3*5	2
3	39 + 11		2*3*7	3
2	38 + 12	2,3	2*5*7	1
	<u>37 + 13</u>		3*5*7	2
2,3	36 + 14	2,7	2*3*5*7	1
5,7	35 + 15	3,5		
2	34 + 16	2		
3	33 + 17		P(50) = 4	T(50) = 2
2	32 + 18	2,3		
	<u>31 + 19</u>			
2,3,5	30 + 20	2,5		
	29 + 21	3,7		
2,7	28 + 22	2		
3	27 + 23			
2	26 + 24	2,3		
5	25 + 25	5		

Tiedetään, että jos luvulla ei ole alkutekijöitä $\leq \sqrt{2k}$, niin luku on alkuluku. Ellei luku ole joku näistä alkutekijöistä, jolloin luku on myös alkuluku. Yllä olevaan kaavioon on merkitty lukujen vierelle niiden alkutekijät, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin $\sqrt{50}$. Nyt helposti nähdään mitkä luvuista ovat alkulukuja ja mitkä eivät. (Sellaiset parit, joista molemmat luvut ovat alkulukuja, on alleviivattu.)

Lause 5

$$T(2k) = \sum_{d|R(2k)} \mu(d) M(d)$$

Todistus:

Koska M(d) on niiden summaparien lukumäärä, että d jakaa summaparin termien tulon, niin Inkluusio-Ekluusio periaatteen mukaan T(2k) sisältää kaikki ne summaparit, joiden kumpikaan termi ei ole jaollinen millään alkuluvulla $\leq \sqrt{2k}$. Täten annettu väite on tosi.

Esim.

Käyttämällä aiemmin esiintynyttä esimerkkiä voidaan lauseen 5 perusteella kirjoittaa.

T(50) = $25 - 13 - 17 - 5 - 8 + 9 + 3 + 4 + 4 + 5 + 2 - 2 - 3 - 1 - 2 + 1 = 2$, mikä selvästi pitää paikkaansa.

Seuraavien kahden luvun aikana on tarkoitus pilkkoa M(d) osiin ja saattaa se yksinkertaisempaan muotoon.

3.2 Funktio v(d; k)

Voidaan selvästi tehdä seuraava jako.

Määritelmä 9

M(d) = $\left[\frac{k}{d}\right]$ v(d; k) + h(d; k), missä v(d; k) = $\#\left\{t \middle| 1 \leq t \leq d \wedge k^2 - t^2 \equiv 0 \pmod{d}\right\}$ (1)

ja h(d; k) = $\#\left\{t \middle| 1 \leq t \leq k \bmod d \wedge k^2 - t^2 \equiv 0 \pmod{d}\right\}$ (2)

Aluksi syvennymme tarkastelemaan funktiota v(d; k).

Lemma 1

$syt(k-t, k+t) = syt(k,t)$, jos 2 ei jaa $k-t$:tä.

Todistus:

Selvästi $syt(k-t, k+t) = syt(k-t, (k-t)+2t) = syt(k,t)$, sillä jos p jakaa a:n ja ei jaa b:tä, niin se ei myöskään jaa a+b:tä. Täten annettu väite on tosi.

Lause 6

v(d; k) = $2^{\omega(d) - \omega(syt(2k,d))}$

Todistus:

Tiedetään, että $k^2 - t^2 = (k-t)(k+t)$ ja $syt(k-t, k+t) = syt(k,t)$ jos 2 ei jaa $k-t$:tä. Siten jokainen alkuluku p joka ei jaa k:ta ja jakaa d:n sekä $k^2 - t^2$:n, jakaa jommankumman luvuista $(k-t)\, tai\, (k+t)$ ja siten kaikki yhtälön (1) ratkaisut toteuttavat ehdon $t \equiv \pm k (\mathrm{mod}\, p)$,(huom. jos p=2, niin $t \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$). Ja jos q jakaa k:n ja d:n sekä $k^2 - t^2$:n, niin q jakaa molemmat luvut $(k-t) : n, että\, (k+t) : n$ mistä seuraa, että kaikki yhtälön (1) ratkaisut toteuttavat ehdon $t \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$. Jos $u_i \in \{k, -k\}$, niin jokainen yhtälön (1) ratkaisu a toteuttaa seuraavan kongruenssi ryhmän:

$$
\begin{aligned}
a &\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, q_1) \\
&\vdots \\
a &\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, q_n) \\
a &\equiv u_1 (\mathrm{mod}\, p_1) \\
&\vdots \\
a &\equiv u_m (\mathrm{mod}\, p_m)
\end{aligned}
$$

Ja $q_1 \cdots q_n p_1 \cdots p_m = d$

Nyt huomataan Kiinalaisen jäännöslauseen perusteella, että jokainen erilainen u_i :n valinta tuottaa erilaisen ratkaisun modulo d. Kiinalainen jäännöslause myös sanoo, että jokainen kongruenssi ryhmä tuottaa yksikäsitteisen ratkaisun modulo d. Siten tuloperiaatteen mukaan ratkaisujen lukumäärä on $2^m = 2^{\omega(d) - \omega(syt(2k, d))}$. Täten annettu väite on tosi.

Lemma 2

Jos syt(a, b) = 1, niin $\omega(a) + \omega(b) = \omega(ab)$

Todistus:

Väite seuraa suoraan funktion $\omega(n)$ määritelmästä. Täten annettu väite on tosi.

Lause 7

Funktio v(d; k) on multiplikatiivinen.

Todistus:

Jos syt(a, b) = 1, niin

$2^{\omega(a) - \omega(syt(2k,a))} \times 2^{\omega(b) - \omega(syt(2k,b))} = 2^{\omega(a) + \omega(b) - (\omega(syt(2k,a)) + \omega(syt(2k,b)))}$, joka on lemma 2 mukaan: $2^{\omega(ab) - \omega(syt(2k,ab))}$. Täten annettu väite on tosi.

3.3 Funktio h(d; k)

Funktio h(d, k) on paljon monimutkaisempi. Esitämme seuraavaksi joitain funktiota h(d; k) koskevia lauseita.

Lause 8

Jos syt(d, ak) = 1, niin h(ad; ak) = h(d; k)

Todistus:

Koska syt(ad, ak) = a, niin a jakaa kaikki yhtälön $(ak)^2 - x^2 \equiv 0 (\bmod ad)$ ratkaisut. Yhtälö voidaan siis kirjoittaa muotoon: $a^2\left(k^2 - y^2\right) \equiv 0 (\bmod da) \Leftrightarrow k^2 - y^2 \equiv 0 (\bmod d)$, missä ay = x. Ja yhtälön määrittelyjoukko voidaan kirjoittaa muotoon: $1 \le x \le ak \bmod ad \Leftrightarrow 1 \le y \le k \bmod d$. Täten annettu väite on tosi.

Lause 9

Jos p on pariton alkuluku ja $1 \le a < p$, niin h(p; a) = $\begin{cases} 1, \mathit{jos}\, a \le (p-1)/2 \\ 2, \mathit{jos}\, a > (p-1)/2 \end{cases}$

Todistus:

Huomataan, että a toteuttaa aina yhtälön: $a^2 - x^2, 1 \le x \le a$. Täten h(p; a) $\ge$ 1. Kun yhtälö kirjoitetaan muotoon: $a^2 - x^2 = (a-x)(a+x)$, niin nähdään, että toinen ratkaisu on $p - a = b$ jos ja vain jos b < a. Täten annettu väite on tosi.

Seuraavat kaksi lausetta seuraavat suoraan funktion h(d; k):n määritelmästä.

Lause 10

Jos $k^2 < d$, niin h(d; k) = 1

Lause 11

Jos d jakaa k:n, niin h(d; k) = 0

Lause 12

h(d; d-a) = v(d; d-a) ja a<d, jos $k^2 < d$

Todistus:

Tutkitaan milloin d ei jaa lukua $(d-a)^2 - (d-b)^2$ ja $0 \le b < a$. Huomataan, että silloin d ei jaa lukua $a^2 - b^2$ja $0 \le b < a$. Täten lauseen 6 ja h(d; k):n määritelmän mukaan annettu väite on tosi.
Lauseiden 10 ja 12 pohjalta voidaan saada yleisempi tulos:

Lause 13

h(d; a) + h(d; d-a) = v(d; a) +1, $1 \le a < d$

Todistus:

h(d; a) = $\#\{t : 1 \le t < a \bmod d \wedge a^2 - t^2 \equiv 0 \pmod d\}$ +1 määritelmän mukaan ja h(d; d-a) = v(d; a) - $\#\{t : 1 \le t < a \bmod d \wedge a^2 - t^2 \equiv 0 \pmod d\}$, sillä $(d-a)^2 - (d-t)^2 \equiv a^2 - t^2 \pmod d$ ja $d - t > d - a$. Täten annettu väite on tosi lauseen 6 mukaan.

3.4 Funktio H(2k) ja funktio V(2k)

Otetaan käyttöön seuraavat uudet merkinnät: $V(2k) = \sum_{d|R(2k)} \mu(d) v(d;k) \left[\frac{k}{d}\right]$ ja $H(2k) = \sum_{d|R(2k)} \mu(d) h(d;k)$. Huomataan helposti, että T(2k) = V(2k) + H(2k).

Konjektuuri 1

H(2k) = $O\left(\pi\left(\sqrt{2k}\right)\right)$

Määritelmä 10

$\frac{a}{b} = \left[\frac{a}{b}\right] + \left\{\frac{a}{b}\right\}$, missä $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ on luvun $\frac{a}{b}$ desimaaliosa.

Määritelmän 10 avulla V(2k) voidaan kirjoittaa muodossa:

$V(2k) = \sum_{d|R(2k)} \mu(d) v(d;k) \frac{k}{d}$ - $\sum_{d|R(2k)} \mu(d) v(d;k) \left\{\frac{k}{d}\right\}$. Ottamalla k tekijäksi ensimmäisestä summasta nähdään, että summan sisään jää jäljelle funktio, joka on multiplikatiivinen, sillä multiplikatiivisten funktioiden tulo on multiplikatiivinen. Täten lauseen 1 perusteella saamme seuraavan lauseen:

Lause 14

$E(2k) = \sum_{d|R(2k)} \mu(d) v(d;k) \frac{k}{d} = k \prod_{d|R(2k)} \left(1 - \frac{t(p)}{p}\right)$, missä

t(p) = $\begin{cases} 2, \; jos \; syt(2k, p) = 1 \\ 1, \; jos \; syt(2k, p) \ne 1 \end{cases}$

Lause 15

$$\frac{k}{\sqrt{8k}} \le E(2k)$$

Todistus:

$$k \prod_{d|R(2k)} \left(1 - \frac{t(p)}{p}\right) \ge \frac{k}{2} \prod_{d|R(2k)/2} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = \frac{k}{2} \prod_{d|R(2k)/2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

$$\ge \frac{k}{2} \prod_{n=2}^{\left[\sqrt{2k}\right]} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{k}{2}\left[\sqrt{2k}\right]^{-1} \ge \frac{k}{\sqrt{8k}}$$

Täten annettu väite on tosi.

Otaksumme seuraavaa:

Konjektuuri 2

$$\sum_{d|R(2k)} \mu(d) v(d;k) \left\{\frac{k}{d}\right\} = O\left(\pi\left(\sqrt{2k}\right)\right)$$

Lause 16

Jos konjektuurit 1 ja 2 ovat tosia, niin jokainen mielivaltaisen suuri parillinen luku voidaan esittää kahden alkuluvun summana.

Todistus:

Konjektuurien perusteella voidaan kirjoittaa T(2k) = E(2k) + $O\left(\pi\left(\sqrt{2k}\right)\right)$. Huomataan, että

$\lim_{k\to\infty} \dfrac{\dfrac{k}{2\sqrt{2k}}}{c\dfrac{\sqrt{2k}}{\ln\sqrt{2k}}} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{k \ln\sqrt{2k}}{4ck} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{4c}\ln\sqrt{2k} = \infty$, missä c on vakio. Täten lauseiden 4 ja 15 perusteella voidaan päätellä, että $\lim_{k\to\infty} \dfrac{E(2k)}{O(\pi(\sqrt{2k}))} = \infty$, mistä väite seuraa.

4. Tulosten arviointi

Tavoitteena oli selvittää kuinka monella eri tavalla luku 2k voidaan esittää lukua $\sqrt{2k}$ suurempien kahden eri alkuluvun summana. Saimme seulamenetelmällä kombinatoristisen kaavan $T(2k) = \sum_{d|R(2k)} \mu(d) M(d)$. Purkamalla sen osiin ja tutkimalla niitä saimme paljon arvokasta tietoa sen rakenteesta. Tutkielmassa ei saada aikaiseksi mitään ihmeellisiä tuloksia, mutta se tosin ei ole ihme, sillä aihekin on suhteellisen haastava. Konjektuureille, joita tutkielmassa esitetään, ei ole mitään kunnon selitystä miksi näin pitäisi olla. On paljon mahdollista, että ne ovat epätosia. Tietokoneiden avulla voitaisiin tarkistaa niiden totuutta hyvin pitkälle, mutta ei todistaa. Koska en hallitse tietokoneohjelmointia, minulla ei ole edes numeerisia todistusaineistoja konjektuurien tueksi. Tutkielma on osoitus siitä, kuinka vaikeaakin aihetta voidaan tutkia yksinkertaisilla työkaluilla. Kun tutkimus aiheen parissa vielä etenee, joudutaan todennäköisesti ottamaan käyttöön paljon monimutkaisempia työkaluja, joita ovat esim. kompleksianalyysi ja algebrallinen lukuteoria.

Lähdeluettelo

[1] **LeVeque, William J.**, 1977, Fundamentals of Number Theory, Dover Publications

[2] Päivitetty: 5.8.2008 klo 19.12, http://fi.wikipedia.org/wiki/Goldbachin_konjektuuri, luettu: 23.10.2008

Liite 1

2n	P(2n)	T(2n)	H(2n)	E(2n)	$\sum_{d\|R(2n)} \mu(d)v(d;n)\left\{\frac{n}{d}\right\}$
4	1	1	0	1	0
6	1	1	-1	1+1/2	-1/2
8	1	2	0	2	0
10	2	0	-1	5/6	-1/6
12	1	2	0	2	0
14	2	1	-1	1+1/6	-5/6
16	2	1	-1	1+1/3	-2/3
18	2	3	0	3	0
20	2	2	1	1+2/3	2/3
22	3	1	-1	1+5/6	-1/6
24	3	4	0	4	0
26	3	1	0	1+3/10	3/10
28	2	1	0	1+2/5	2/5
30	2	3	0	4	1
32	2	2	0	1+2/5	-2/5
34	4	2	-2	1+7/10	-2-3/10
36	4	3	-1	3+3/5	-2/5
38	2	3	-2	1+9/10	-3-1/10
40	3	2	-2	2+2/3	-1-1/3
42	5	4	-1	4+1/5	-4/5
44	3	3	0	2+1/5	-4/5
46	4	1	-3	2+3/10	-1-7/10
48	5	5	-1	4+4/5	-1-1/5

Taulukossa olevat arvot on laskettu kynällä ja paperilla, käyttämällä apuna tutkielmassa esitettyjä lauseita ja menetelmiä.